Tome 14. N° 10. Octobre 1953.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

THÉORIE DES GAZ. XVI. COURBE DE BASE ET COURBES DÉRIVÉES. ÉTAT DU GAZ AUX TEMPÉRATURES ÉLEVÉES

Par Jacques DUCLAUX,

Sommaire. — Mode de calcul de la courbe de base et relations avec les courbes dérivées (isothermes). Variation des constantes avec la température. Quand la température s'élève indéfiniment, l'état du gaz tend vers un état limite qui n'est pas l'état parfait et qui diffère d'un gaz à l'autre. Mode de calcul de l'isotherme aux températures inaccessibles à l'expérience.

Les Mémoires précédents [1] ont montré comment l'emploi de la *courbe de base* facilitait l'étude de la compressibilité et de la liquéfaction des gaz réels (oxygène, azote, argon). J'ai reconnu depuis que les résultats étaient aussi favorables avec le néon.

La courbe de base se déduit, dans la plus grande partie de son étendue, de l'hypothèse de la condensation progressive prise sous sa forme la plus simple. Le mode de déduction a été décrit sommairement [2], mais comme j'ai reconnu depuis la nécessité de changer le mode de calcul, je reviens ici sur cette question en donnant tous les détails nécessaires, pour pouvoir en tirer de nouvelles déductions, notamment en ce qui concerne l'équation d'état aux hautes températures.

L'hypothèse fondamentale, admise à titre de simplification, est que les molécules se groupent par 2, puis par 4, par 8, 16, etc., tous ces agrégats étant en équilibre les uns avec les autres suivant la loi ordinaire d'action de masses. Nous représenterons par C_n la concentration (nombre par unité de volume) des agrégats de 2^n molécules simples (agrégats d'ordre n). Toutes les équations d'équilibre sont de la forme

$$C_n^2 = K_n C_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Les coefficients K sont tous différents. Nous admettons qu'ils se déduisent les uns des autres par la loi de récurrence

$$K_{n+1} = p K_n. \tag{1}$$

Nous avons choisi cette loi en raison de sa simplicité; plus tard nous aurons à la revoir, mais actuellement nous pouvons nous y tenir.

Le calcul des concentrations C_n se fait par approximations successives. Nous supposons qu'il y aurait dans le volume unité 1000 molécules simples si tous les agrégats étaient dissociés, et nous prenons pour K_0 la valeur 10^7. Nous aurons alors dans le volume unité

$$C_0^2 = 10^7 C_1, \qquad C_1^2 = p.10^7 C_2,$$

avec la condition

$$C_0 + 2C_1 + 4C_2 + \ldots = 1000.$$

Le calcul montre que la concentration C_2 et toutes les suivantes sont négligeables à l'approximation de 1 sur 10 000. On a alors

$$C_0 = 999{,}8, \qquad C_1 = 0{,}10.$$

Supposons maintenant que le gaz soit réduit au volume 0,1 (ou que sa densité devienne dix fois plus grande). Les équations d'équilibre seront les mêmes et la condition deviendra

$$C_0 + 2C_1 + 4C_2 + \ldots = 10\,000,$$

soit, en prenant pour p la valeur 0,7 qui convient à l'oxygène et à l'argon

$$C_0 = 9\,980, \qquad C_1 = 10, \qquad C_2 = 1{,}4.10^{-5}.$$

Le principe du calcul est simple. L'application est facile tant que le degré d'agrégation est peu élevé. Quand il est grand, il faut quelquefois six approximations successives. Les résultats ne peuvent pas être mis sous une forme algébrique parce que les séries auxquelles on arrive ne sont pas sommables. Il faut dresser des Tables numériques; je donne

TABLEAU I.

Valeurs des concentrations C en fonction des volumes V.

V.	C_0.	C_1.	C_2.	C_3.	C_4.	C_5.
1........	999,8	0,10	–	–	–	–
0,1......	9 980	10	–	–	–	–
0,01.....	98 076	962	0,1	–	–	–
0,001....	$8,52.10^5$	$7,26.10^4$	752	0,11	–	–
0,0001...	$4,23.10^6$	$1,79.10^6$	$4,58.10^5$	$4,29.10^4$	536	0,12

(tableau I) un extrait de celle qui correspond à la valeur 0,7 prise pour le coefficient p de la formule (1).

Pour calculer l'influence de l'association des molécules sur la pression nous admettons, conformément à la loi d'équipartition, que tous les agrégats ont la même valeur cinétique, indépendamment de leur masse. Nous négligeons les actions à distance qui font la base de la théorie de van der Waals. Soit RT la pression qu'aurait le gaz sous le volume 1 si tous les agrégats étaient dissociés; sa pression réelle sera

$$RT\frac{999,8+0,1}{1\,000}=0,9999\,RT.$$

Si le volume est 0,1, elle sera

$$10\,RT\frac{9\,980+10+1,4.10^{-5}}{10\,000}=9,99\,RT$$

et ainsi de suite.

Le covolume est supposé nul, tous les calculs se

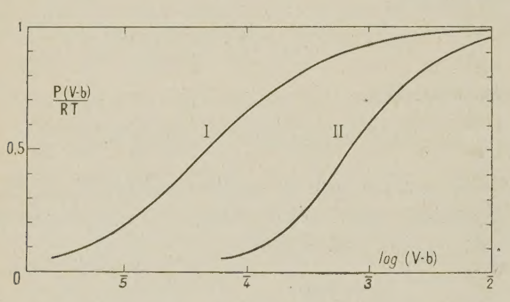


Fig. 1. — Courbe de base (I) et courbe dérivée (II) pour l'oxygène; la valeur du facteur F pour la courbe dérivée est 0,73.

faisant sur le gaz fictif correspondant au gaz réel et n'en différant que par un covolume nul. La pression du gaz réel sous un volume quelconque V est égale à celle du gaz fictif sous le volume $(V-b)$, b étant le covolume.

Enfin pour représenter les résultats nous employons un système de coordonnées particulier (*fig.* 1).

En abscisses, le logarithme du volume du gaz fictif, soit $\log(V-b)$.

En ordonnées, les valeurs de $\frac{P(V-b)}{RT}$ calculées comme il vient d'être dit. Le résultat est la courbe de base.

Pour la tracer, nous avons fait deux hypothèses :

1° L'unité de volume contient 1000 molécules;

2° La constante K est égale à 10^7.

Ces hypothèses étant arbitraires, il faut s'assurer que d'autres conduiraient au même résultat.

1° Supposons que, au lieu de 1000 molécules, nous en ayons 10 000. Nous retrouverons les mêmes rapports entre tous les C et les mêmes valeurs de $\frac{P(V-b)}{RT}$ en prenant pour tous les K des valeurs dix fois plus grandes, ce qui ne change pas leurs rapports mutuels conformes à la relation (1). La courbe de base ne subira aucun changement.

2° Supposons que, le nombre des molécules restant le même, nous fassions tous les K dix fois plus grands. Alors nous retrouverons uniformément les mêmes valeurs de $\frac{P(V-b)}{RT}$, pour des volumes dix fois plus petits. Les abscisses étant les logarithmes des volumes, la courbe de base aura subi une translation horizontale sans changement de forme. Cette relation est très importante : un changement des constantes d'équilibre se traduit par une translation de la courbe de base. La forme de cette courbe ne dépend que du paramètre p, variable d'un gaz à l'autre.

Courbes dérivées. — Il a été montré dans les Mémoires précédents que les isothermes du gaz réel se déduisent de la courbe de base par une translation, qui n'en change pas la forme, et une dilatation des abscisses, c'est-à-dire une multiplication par un facteur fonction de la température seulement et que nous avons appelé le facteur F. Nous obtenons ainsi les *courbes dérivées* (*fig.* 1) qui sont différentes par leur nature de la courbe de base. En effet, elles dépendent de deux paramètres p et F; il est impossible de les retrouver au moyen du seul paramètre p, quelle que soit sa valeur, à moins que F ne soit égal à 1, ce qui comme nous le verrons ne se produit jamais.

Nous les obtenons par une dilatation de la courbe de base, mais elles peuvent être obtenues directement. Il suffit de modifier les hypothèses qui nous ont servi à établir la courbe de base. Nous prendrons les plus simples, bien qu'elles entraînent des difficultés théoriques.

Pour obtenir la courbe de base, nous partions de la loi d'actions de masse

$$C_n^2=K_n\,C_{n+1}$$

dans laquelle la constante K_n ne dépend que de la température; elle est indépendante de la densité (ou du volume spécifique) du gaz.

Pour retrouver directement une courbe dérivée, nous admettons que tous les K dépendent du volume spécifique $(V-b)$ et tous de la même manière, étant proportionnels à la puissance m de ce volume,

de telle sorte que pour deux volumes $(V-b)_1$ et $(V-b)_2$ de la même masse de gaz nous aurons toujours

$$[\log K_n - m\log(V-b)]_1 = [\log K_n - m\log(V-b)]_2 = \text{const.}, \qquad (1)$$

la valeur du paramètre m étant indépendante de n et du volume et fonction de la température seulement. D'ailleurs, pour le calcul numérique nous admettons pour le volume 1 les mêmes valeurs des K que pour la courbe de base et les mêmes unités de concentration. La courbe dérivée doit, comme la courbe de base, être représentée par une Table numérique calculée aussi par approximations successives de la même manière.

Cette Table est identique à celle que l'on calculerait en partant de la Table de base établie pour la même valeur de p, en multipliant les abscisses par le facteur F, à la condition que l'on ait la relation

$$F = \frac{1}{1+m}. \qquad (2)$$

Cette relation est simplement une propriété mathématique indépendante de toute théorie. Elle deviendra essentielle quand nous aurons à rechercher la signification théorique de F et de m.

D'après cette relation, si le paramètre m est nul [auquel cas d'après la relation (1) nous retrouvons la loi ordinaire d'action de masses], la valeur correspondante de F est égale à 1 et la courbe dérivée devient identique à la courbe de base. Elle en diffère d'autant plus que m est plus grand. Sa valeur étant toujours positive, nous voyons que si le volume diminue, tous les K diminuent en même temps, c'est-à-dire que la diminution de volume favorise la condensation : elle est plus forte que ne le voudrait la loi d'action de masses, la différence étant d'autant plus grande que le volume est plus petit. Cette conception paraîtra sans doute difficile à accepter. Je ne me suis pas arrêté à cette objection. Je crois avoir trouvé un moyen de lever la difficulté, qui tient à la forme trop simple donnée à nos hypothèses de départ. Mais pour en avoir la certitude, de longs calculs seront nécessaires, car le problème ne peut pas être traité algébriquement, mettant en jeu des fonctions de forme nouvelle dont les propriétés ne sont pas connues. En attendant, nous admettrons que la courbe dérivée n'a qu'une valeur pratique.

Comme la courbe de base, les courbes dérivées ont une forme indépendante de l'unité de volume, du nombre des molécules par unité de volume et de la valeur admise pour le coefficient K_0, et un changement de l'un de ces paramètres se traduit seulement par une translation parallèle à l'axe des abscisses. La valeur de cette translation est seulement modifiée et devient fonction de F (ou de m); nous retrouverons cette question plus tard.

Rôle du facteur F et de la translation Δ. — Les isothermes des gaz étudiés jusqu'ici (azote, oxygène, argon, néon) sont les courbes dérivées résultant d'une translation Δ et d'une dilatation F de la courbe de base. Le rôle de F et celui de Δ sont très différents.

Le facteur F détermine la forme de la courbe dérivée. Il permet, par exemple, de résoudre à lui seul le problème suivant :

Étant donnée la valeur de $\frac{P(V-b)}{RT}$ à la température T, sous un volume quelconque, en déduire la pression pour un autre volume quelconque, multiple connu du premier.

Il suffit, en effet, de reporter sur la courbe dérivée correspondante à la température T la valeur connue de $\frac{P(V-b)}{RT}$, ce qui donne une certaine abscisse V_1 et de lire l'ordonnée pour un autre volume multiple connu de V_1.

Mais, la courbe dérivée étant établie dans une unité de volume arbitraire, sa seule connaissance ne permet pas de connaître la valeur de $\frac{P(V-b)}{RT}$, ni par suite celle de P, pour un volume spécifique connu, évalué par exemple en litres par molécule-gramme. Pour y parvenir, il faut connaître la translation Δ qui fixe l'unité de volume; ou, comme nous l'avons vu, la valeur des constantes K.

Nous pourrions évidemment nous passer de Δ en calculant à chaque température la courbe dérivée au moyen de valeurs de K telles que la translation Δ soit toujours nulle. Nous serons obligé de faire ce travail plus tard. Mais la simplification serait purement apparente, car les isothermes ainsi tracées ne se déduiraient plus par une simple dilatation de la courbe de base. Le facteur F disparaîtrait et son rôle est trop important pour que nous renoncions à nous en servir.

Variation avec la température du facteur F. — Cette variation peut être établie par l'expérience, puisque les mesures de compressibilité nous donnent à chaque température la valeur de F. Pour rendre comparables les résultats donnés par divers gaz, les valeurs de F sont reportées sur la figure 2 non pas en fonction de la température T, mais en fonction du rapport $\frac{T_c}{T}$, T_c étant la température critique du gaz considéré.

La dispersion des nombres est considérable, au moins aux températures élevées; la valeur de F ne peut pas être fixée à mieux que 5 pour 100 près. Mais si l'on considère l'ensemble des nombres, il n'y a pas de doute que lorsque la température s'élève indéfiniment la valeur de F pour les quatre gaz tend vers une limite très voisine de l'unité. Une discussion que j'omets montre que l'écart avec l'unité peut s'expliquer par une incertitude sur la valeur du covolume ou sur le type de la courbe de

base. Nous dépasserons donc à peine l'expérience si nous admettons que la limite est exactement l'unité, ce qui nous permet d'énoncer la loi suivante :

Aux températures élevées, l'isotherme se réduit à la courbe de base.

Cette loi est évidemment en rapport avec le fait que la courbe de base est la seule, comme nous

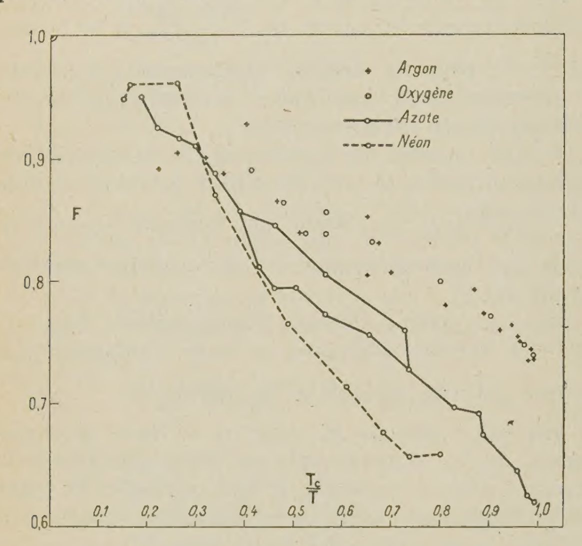


Fig. 2. — Valeurs du facteur F en fonction de la température T.

l'avons vu, qui admette sous sa forme ordinaire la loi d'action de masses. Le passage de la courbe de base à une courbe dérivée est le résultat d'une perturbation d'autant plus forte que la température est plus basse.

Ainsi, à température élevée, le gaz ne tend pas vers l'état parfait, mais vers un état que nous appellerons l'*état réel limite* et qui n'est pas le même pour tous les gaz puisque la courbe de base diffère de l'un à l'autre.

Cette loi n'est évidemment valable que si le gaz ne subit pas de modification interne telle que ionisation, dissociation, etc.

Elle ne suffit pas à fixer l'état du gaz, c'est-à-dire à fixer la pression correspondante à un volume connu, évalué par exemple en unités Amagat. Pour y arriver, la connaissance de la translation est comme nous l'avons vu nécessaire. Il faudrait donc pouvoir extrapoler vers les températures élevées la valeur de la translation Δ comme nous venons de le faire pour le facteur F.

Cette partie du travail est beaucoup plus difficile, parce que Δ est beaucoup plus sensible que F aux incertitudes des mesures; la dispersion des points est telle que le tracé d'une courbe moyenne est incertain, à plus forte raison l'extrapolation. Il faut d'abord rectifier les valeurs de F en traçant une courbe moyenne qui passe aussi bien que possible au milieu des points de la figure 2; puis calculer, pour chaque valeur rectifiée, la valeur de Δ qui représente le mieux l'expérience. On forme ainsi le diagramme de la figure 3.

L'extrapolation vers les hautes températures reste malgré tout incertaine. Il faudrait savoir vers quelle valeur tend Δ quand la température augmente indéfiniment. Le plus probable est que cette valeur est $-\infty$. En effet, nous avons vu que si la constante d'association K est multipliée par n, la translation diminue de $(\log n)$. Or il est logique de supposer que, à température très élevée, K doit devenir infiniment grand (association de plus en plus faible); donc Δ doit devenir infiniment grand négatif. Tenant compte de cette relation, nous sommes conduit à extrapoler la courbe de la figure 3 suivant la ligne en pointillé qui n'est pas grossièrement inexacte, au moins au début. Nous voyons ainsi que Δ doit prendre, par exemple, la valeur 0,5 pour l'argon lorsque $\frac{T_c}{T}$ est voisin de 0,1, c'est-à-dire vers 1200° C. La valeur de F est alors 0,975.

Avec ces chiffres, nous pouvons calculer l'isotherme à 1200° C. Prenons un volume Amagat $(V-b)$ égal à 0,01 dont le logarithme est -2. En retranchant la translation 0,5, nous obtenons $-2,5$ qui, divisé par le facteur 0,975, donne $-2,86$. Sur la courbe de base, la valeur correspondante de $\frac{P(V-b)}{RT}$

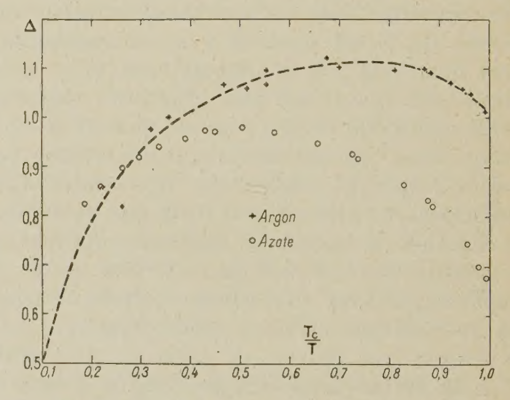


Fig. 3. — Valeurs de la translation Δ en fonction de la température T.

est 0,968. La valeur de RT étant 5,39, nous obtenons finalement

$$P = 522 \text{ atm.}$$

Le même calcul donne pour d'autres volumes, toujours pour l'argon

V.	$V-b$.	P (atm).	$\frac{PV}{RT}$.
0,05165	0,05	107	1,025
0,02165	0,02	265	1,064
0,01165	0,01	522	1,127
0,00665	0,005	1014	1,251

Mais il est possible que ces chiffres ne soient encore que des approximations, surtout pour les petits volumes, car nous ne savons pas si la loi d'isocondensation, sur laquelle tout le calcul repose, est encore valable à haute température pour des pressions très fortes. Tout ce que nous pouvons dire est que son domaine de validité s'étend beaucoup à mesure que la température s'élève, la limite supérieure étant environ 50 atm à — 100° et plus de 150 atm à 0°. Mais il ne peut pas s'étendre indéfiniment puisque nos calculs supposent le covolume constant, ce qui n'est plus vrai pour les pressions très élevées. Toutes les théories rencontrent la même difficulté.

Manuscrit reçu le 24 avril 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *J. Chim. Phys.*, 1952, **49**, 523; 1953, **50**, 113.

[2] *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 235.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 14, OCTOBRE 1953, PAGE 501.

SUR UNE NOUVELLE THÉORIE DES CORPUSCULES DE SPIN QUELCONQUE ET SON APPLICATION AU CALCUL DES SECTIONS EFFICACES DE DIFFUSION COULOMBIENNE

Par GÉRARD PETIAU,

Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Nous nous proposons dans la première partie de ce travail l'examen de quelques caractères fondamentaux du formalisme d'une théorie générale des corpuscules de spin multiple de $\frac{\hbar}{2}$, dans laquelle un système d'équations d'ondes irréductible représente un corpuscule possédant le spin total $n\frac{\hbar}{2}$ et une seule valeur de la masse propre m_0 tout en échappant aux objections élevées contre les théories analogues proposées antérieurement.

Dans la seconde partie, nous établissons les formules générales donnant l'expression de la section efficace de diffusion coulombienne électromagnétique résultant du choc de deux corpuscules élémentaires discernables de spins $n\frac{\hbar}{2}$ et $m\frac{\hbar}{2}$.

1. Caractères généraux d'une nouvelle théorie des corpuscules de spin quelconque. — Plusieurs auteurs [1], [2], [3] ont déjà proposé de représenter les corpuscules élémentaires possédant le spin total maximum $n\frac{\hbar}{2}$ et la masse propre minimum m_0 par le système d'équations d'ondes

$$[p_\mu \Gamma^\mu + i m_0 c]\,\psi_{i_1\ldots i_n} = 0 \qquad (1)$$

dans lequel

$$\left.\begin{aligned} &p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad x^4 = ict, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \\ &(\Gamma^\mu)_{i_1\ldots i_n;\,l_1\ldots l_n} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \delta_{i_1 l_1}\ldots(\gamma^\mu)_{i_r l_r}\ldots\delta_{i_n l_n} \\ &(i_1, \ldots, i_n;\ l_1, \ldots, l_n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les $(\gamma^\mu)_{i_r l_r}$ sont les générateurs de n systèmes de matrices de Dirac, que nous supposons écrits dans la même représentation.

Nous avons donc

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{i_r l_r} + (\gamma^\nu\gamma^\mu)_{i_r l_r} = 2\delta^{\mu\nu}\delta_{i_r l_r}, \\ &(\gamma^\mu)_{i_r l_r}(\gamma^\nu)_{i_s l_s} = (\gamma^\nu)_{i_s l_s}(\gamma^\mu)_{i_r l_r} \\ &(r, s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Les $\psi_{i_1\ldots i_n}$ forment un tableau de 4^n fonctions d'ondes.

A l'équation (1) écrite en variables d'univers x^μ ($x^4 = ict$, $\mathbf{x}$) correspond une équation écrite en variables d'espace-temps ct, $\mathbf{x}$ et en matrices α_μ [$\alpha_4 = \gamma_4$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_p = -i\gamma_4\gamma_p$ ($p = 1, 2, 3$)], soit

$$[p_0 A_0 + (\mathbf{p}\mathbf{A}) + m_0 c A_4]\,\psi_{i_1\ldots i_n} = 0 \qquad (4)$$

dans laquelle on a

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \\ &(A_0)_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\alpha_4)_{i_1 l_1}\ldots(\alpha_0)_{i_r l_r}\ldots(\alpha_4)_{i_n l_n}, \\ &(\mathbf{A})_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\alpha_4)_{i_1 l_1}\ldots(\boldsymbol{\alpha})_{i_r l_r}\ldots(\alpha_4)_{i_n l_n}, \\ &(A_4)_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} = (\alpha_4)_{i_1 l_1}\ldots(\alpha_4)_{i_n l_n}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Sur les équations (1) ou (4), on peut voir, d'une part que le corpuscule représenté possède une série d'états de masse propre déterminée à partir de m_0 et que, d'autre part, le spin total possède également une série de valeurs propres bien déterminée. Il en résulte que les équations (1) ou (4) et les fonctions d'ondes $\psi_{i_1\ldots i_n}$ correspondantes constituent un système doublement réductible.

Nous nous proposons ici de montrer qu'il existe et de déterminer un projecteur que nous écrirons

$$\eta^{(n)}_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} \quad (6)$$

tel que les fonctions

$$\psi'_{i_1\ldots i_n} = \eta^{(n)}_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n}\psi_{l_1\ldots l_n}, \quad (7)$$

solutions de (1) ou de (4) constituent uniquement la solution du système irréductible extrait de (1) ou de (4) correspondant à la masse propre m_0 et au spin total $n\frac{\hbar}{2}$.

Posant

$$(\beta^\mu)_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} = (\Gamma^\mu\eta^{(n)})_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n}, \quad (8)$$

l'équation d'ondes

$$[p_\mu\beta^\mu + i m_0 c\,\eta^{(n)}]_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n}\psi_{l_1\ldots l_n} = 0 \quad (9)$$

représentera au moyen de ses solutions $\psi_{i_1\ldots i_n}$ un corpuscule possédant un seul état de masse propre et un seul état de spin total.

A partir de l'équation (4), on met facilement en évidence l'existence des différents états de masse propre en se plaçant dans le système propre.

L'équation (4) qui se réduit dans ce système à

$$[p_0 A_0 + m_0 c A_4]\,\psi_{i_1\ldots i_n} = 0 \quad (10)$$

donne immédiatement l'équation du second ordre

$$[p_0^2 A_0^2 - m_0^2 c^2]\,\psi_{i_1\ldots i_n} = 0. \quad (11)$$

Si, suivant la méthode de Dirac, nous représentons les matrices α_μ par la combinaison de deux systèmes de matrices du second rang $(\sigma_A)_{jm}$, $(\rho_A)_{kp}$, avec

$$j,\ k,\ m,\ p = 1,\ 2; \qquad A = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

nous avons avec les représentations habituelles

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha_4)_{il} \to \delta_{jm}(\rho_3)_{kp}, \qquad \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ &(\rho_3)_{kp} = -(-1)^k\,\delta_{kp}, \\ &\psi_{i_1\ldots i_n} \to \psi_{j_1 k_1,\, j_2 k_2,\,\ldots,\, j_n k_n}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Nous en déduisons l'expression de $(A_0)^2$

$$(A_0)^2_{j_1 k_1,\ldots,j_n k_n;\, m_1 p_1,\ldots,m_n p_n} = \frac{1}{n^2}\left[n + \sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n}(-1)^{k_r+k_s}\right]\left(\prod_{r=1}^{n}\delta_{k_r p_r}\,\delta_{j_r m_r}\right). \quad (13)$$

Si nous considérons un système de solutions $\psi_{j_1 k_1,\ldots,j_n k_n}$, nous pouvons dans celui-ci répartir les fonctions d'ondes en $n+1$ classes suivant le nombre des indices $k_1, \ldots, k_n$ prenant la valeur 1 ou la valeur 2. Écrivant $\psi^{(p)}$ pour le cas où p indices k ont la valeur 1, les $n-p$ autres ayant la valeur 2, on a immédiatement :

$$(A_0)^2\psi^{(p)} = \left(\frac{n-2p}{n}\right)^2\psi^{(p)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n), \quad (14)$$

d'où

$$\left[p_0^2 - \left(\frac{n}{n-2p}\right)^2 m_0^2 c^2\right]\psi^{(p)} = 0. \quad (15)$$

L'état décrit par le système $\psi^{(p)}$ correspond donc dans le système propre à un corpuscule possédant la masse propre

$$\frac{n}{|n-2p|}\,m_0.$$

Par suite, l'équation d'ondes générale décrit suivant que n est pair ou impair un corpuscule possédant $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ états de masse propre $\left(\text{pour } n \text{ pair, le cas } 2p = n \text{ conduit à } \psi^{\left(\frac{n}{2}\right)} = 0\right)$.

Considérons l'état de masse propre minimum m_0 pour lequel $p = 0$.

Pour cet état, nous avons

$$(A_0)^2\psi = \psi$$

ou

$$\left[n + \sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n}(-1)^{k_r+k_s}\right]\psi_{j_1 k_1,\ldots,j_n k_n} = n^2\,\psi_{j_1 k_1,\ldots,j_n k_n}. \quad (16)$$

On voit facilement que cette condition ne peut être réalisée que si la fonction $\psi_{j_1 k_1,\ldots,j_n k_n}$, non nulle, est complètement symétrique par rapport aux n indices $k_1, \ldots, k_n$

$$\psi_{j_1 k_1, j_r k_r,\ldots, j_s k_s,\ldots, j_n k_n} = \psi_{j_1 k_1,\ldots, j_r k_s,\ldots, j_s k_r,\ldots, j_n k_n}. \quad (17)$$

Le corpuscule décrit par l'équation (4) possède

un spin total représenté par l'opérateur $|S|^2$ où

$$S = \frac{\hbar}{2}\sum_{r=1}^{n} \delta_{i_1 l_1} \dots (\vec{\sigma})_{i_r l_r} \dots \delta_{i_n l_n} \qquad (\sigma_x = i\alpha_y \alpha_z). \quad (18)$$

On a alors

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \sum_{x,y,z} (S_x)^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left[3n + \sum_{\substack{r,s=1 \\ r\neq s}}^{n} \delta_{i_1 l_1} \dots (\vec{\sigma})_{i_r l_r} \dots (\vec{\sigma})_{i_s l_s} \delta_{i_n l_n}\right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left[4n - n^2 + \sum_{A=0,1,2,3} \sum_{r,s} (\sigma^A)_{i_r l_r} (\sigma^A)_{i_s l_s}\right]. \quad (19) \end{aligned}$$

En écrivant cet opérateur au moyen d'indices variant sur 1 et 2 et en utilisant la relation de Pauli liant deux systèmes de matrices σ^A, soit

$$(\sigma^A)_{j_r m_r} (\sigma^A)_{j_s m_s} = 2\delta_{j_r m_s} \delta_{j_s m_r}; \quad (20)$$

on obtient

$$\begin{aligned} (|S|^2)_{j_1 k_1, \dots, j_n k_n; m_1 p_1, \dots, m_n p_n} &= \frac{\hbar^2}{4}\left[(4n - n^2)\prod_{r=1}^{n} \delta_{j_r m_r} \right. \\ &\left. + 2\sum_{\substack{r,s=1 \\ r\neq s}}^{n} \delta_{j_1 m_1} \dots \delta_{j_r m_r} \dots \delta_{j_s m_s} \dots \delta_{j_n m_n}\right] \\ &\times \left(\prod_{r=1}^{n} \delta_{k_r p_r}\right). \quad (21) \end{aligned}$$

Par suite, si l'on considère parmi l'ensemble des fonctions $\psi_{j_1 k_1, \dots, j_n k_n}$, la classe $\psi^{(S)}$ des fonctions complètement symétriques en $j_1, \dots, j_n$, on aura pour ces fonctions

$$|S|^2 \psi^{(S)} = \frac{\hbar^2}{4} n(n+2)\psi^{(S)}, \quad (22)$$

ce qui montre que ces fonctions décrivent des états pour lesquels le spin total est $n\frac{\hbar}{2}$.

Nous voyons donc que l'état de masse propre minimum m_0 est décrit dans le système propre par les fonctions $\psi_{j_1 k_1, \dots, j_n k_n}$ totalement symétriques en $k_1, \dots, k_n$ et que l'état de spin total $n\frac{\hbar}{2}$ est décrit par les fonctions totalement symétriques en $j_1, \dots, j_n$. Nous réaliserons simultanément ces états en considérant des fonctions $\psi_{(i_1 \dots i_n)}$ totalement symétriques par rapport aux n indices de Dirac $i_1, i_2, \dots, i_n$. On voit alors facilement que la séparation ainsi effectuée est invariante par rapport aux transformations de Lorentz.

Nous proposons donc pour équation d'ondes du corpuscule élémentaire de spin total $n\frac{\hbar}{2}$ et de masse propre m_0, l'équation

$$[p_\mu \Gamma^\mu + i m_0 c]\,\psi_{(i_1 \dots i_n)} = 0, \quad (23)$$

avec

$$\psi_{(i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_n)} = \psi_{(i_1 \dots i_s \dots i_r \dots i_n)},$$

les Γ^μ étant définis en (2).

Nous écrivons encore cette équation

$$[p_\mu(\Gamma^\mu \eta^{(n)}) + i m_0 c \eta^{(n)}]\,\psi_{i_1 \dots i_n} = 0 \quad (24)$$

en introduisant l'opérateur de projection sur les fonctions symétriques

$$\eta^{(n)}_{i_1 \dots i_n; l_1 \dots l_n}$$

tel que

$$\psi_{(i_1 \dots i_n)} = \eta^{(n)}_{i_1 \dots i_n; l_1 \dots l_n} \psi_{l_1 \dots l_n}. \quad (25)$$

On peut voir facilement que l'opérateur $\eta^{(n)}$ complètement symétrique par rapport aux indices $i_1 \dots i_n$ et $l_1 \dots l_n$ admet pour $n = 2, 3, \dots$ les représentations suivantes définies par récurrence

$$\eta^{(2)}_{i_1 i_2; l_1 l_2} = \frac{1}{2}[\delta_{i_1 l_1}\delta_{i_2 l_2} + \delta_{i_1 l_2}\delta_{i_2 l_1}], \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)}_{i_1 i_2 i_3; l_1 l_2 l_3} &= \frac{1}{6}[\ (\delta_{i_1 l_1}\delta_{i_2 l_2} + \delta_{i_1 l_2}\delta_{i_2 l_1})\delta_{i_3 l_3} \\ &+ (\delta_{i_1 l_1}\delta_{i_2 l_3} + \delta_{i_1 l_3}\delta_{i_2 l_1})\delta_{i_3 l_2} \\ &+ (\delta_{i_1 l_2}\delta_{i_2 l_3} + \delta_{i_1 l_3}\delta_{i_2 l_2})\delta_{i_3 l_1}] \\ &= \frac{1}{3}[\eta^{(2)}_{i_1 i_2; l_1 l_2}\delta_{i_3 l_3} + \eta^{(2)}_{i_1 i_2; l_1 l_3}\delta_{i_3 l_2} \\ &+ \eta^{(2)}_{i_1 i_2; l_2 l_3}\delta_{i_3 l_1}]. \quad (27) \end{aligned}$$

D'une façon générale

$$\begin{aligned} &\eta^{(n)}_{i_1 \dots i_n; l_1 \dots l_n} \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{p=1}^{n} \eta^{(n-1)}_{i_1 \dots i_{n-1}; l_1 \dots l_{p-1} l_{p+1} \dots l_n} \delta_{i_n l_p}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{p=1}^{n} \eta^{(n-1)}_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_n; l_1 \dots l_{n-1}} \delta_{i_p l_n}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{p=1}^{n} \eta^{(n-1)}_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_n; l_1 \dots l_{q-1} l_{q+1} \dots l_n} \delta_{i_p l_q}\right]. \quad (28) \end{aligned}$$

On montre sans difficulté au moyen de ces expressions que l'on a

$$(\eta^{(n)})^2 = \eta^{(n)}. \quad (29)$$

L'opérateur $\eta^{(n)}$ a pour valeurs propres 0 et 1 et sa trace donne immédiatement le rang de la représentation irréductible de spin total maximum et de masse minimum extraite de l'équation (1) et représentée par les équations (23) ou (24).

A partir de (28), on a

$$\mathrm{Tr}\,\eta^{(n)} = \frac{n+3}{n}\mathrm{Tr}\,\eta^{(n-1)}; \quad (30)$$

or

$$\operatorname{Tr}\eta^{(1)} = 4,$$

d'où

$$\operatorname{Tr}\eta^{(n)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}. \tag{31}$$

On voit ainsi que pour $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, les rangs des représentations irréductibles considérées sont $4, 10, 20, 35, \ldots$.

Les matrices Γ^{μ} ou A^{μ} introduites en (2) et (5) sont des éléments d'un système construit sur les matrices de Dirac dont le terme général s'écrit :

$$(\Gamma^{(n)}_{a_1 a_2 \ldots a_n})_{i_1 \ldots i_n; l_1 \ldots l_n} = \frac{1}{n!} \sum P(a_1, \ldots, a_n)[(\gamma^{a_1})_{i_1 l_1} \ldots (\gamma^{a_n})_{i_n l_n}], \tag{32}$$

la somme étant étendue aux $n!$ permutations $P(a_1, \ldots, a_n)$ des matrices $\gamma_{a_1}, \ldots, \gamma_{a_n}$.

On a notamment pour ces matrices les constructions récurrentes

$$\begin{aligned}(\Gamma^{(n)}_{a_1 a_2 \ldots a_n})_{i_1 \ldots i_n; l_1 \ldots l_n} &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} (\Gamma^{(n-1)}_{a_1 \ldots a_{p-1} a_p \ldots a_n})_{i_1 \ldots i_{n-1}; l_1 \ldots l_{n-1}} (\gamma^{a_p})_{i_n l_n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} (\Gamma^{(n-1)}_{a_1 \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_n})_{i_1 \ldots i_{q-1} i_{q+1} \ldots i_n; l_1 \ldots l_{q-1} l_{q+1} \ldots l_n} (\gamma^{a_p})_{i_q l_q}.\end{aligned} \tag{33}$$

On démontre sans difficulté la commutation

$$\Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n} \eta^{(n)} = \eta^{(n)} \Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}. \tag{34}$$

A toute matrice $\Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$ du système réductible correspondra une matrice du système du corpuscule irréductible que nous écrivons

$$\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n} = \Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n} \eta^{(n)}. \tag{35}$$

Pour faciliter les calculs de la seconde partie, nous établierons quelques règles de l'algèbre des matrices $\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$.

La trace d'une matrice générale $\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$ s'obtient par la règle de récurrence

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n} &= \operatorname{Tr}[\Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n} \eta^{(n)}] \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{p=1}^{n} [\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a_1 \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_n}][\operatorname{Tr}\gamma^{a_p}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{n} \operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a_1 \ldots a_{q-1} (a_q a_p) a_{q+1} \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_n} \right\}.\end{aligned} \tag{36}$$

En particulier, parmi les matrices $\Gamma^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$, nous rencontrerons notamment des matrices de la forme

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{(n)}_{a,a,\ldots,a} &= \prod_{r=1}^{n} (\gamma^a)_{i_r l_r}, \\ \Gamma^{(n)}_{a,a,\ldots,a,b} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (\gamma^a)_{i_1 l_1} \ldots (\gamma^b)_{i_r l_r} \ldots (\gamma^a)_{i_n l_n}, \\ \Gamma^{(n)}_{a,a,\ldots,a,b,c} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{n} (\gamma^a)_{i_1 l_1} \ldots (\gamma^b)_{i_r l_r} \ldots (\gamma^c)_{i_s l_s} \ldots (\gamma^a)_{i_n l_n}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

On obtient facilement pour les traces des matrices $\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$ associées les relations de récurrence

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\beta^{(n)}_{a,\ldots,a} &= \frac{1}{n} (\operatorname{Tr}\gamma^a)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a}) \\ &\quad + \frac{(n-1)}{n} \operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,a,\ldots,a,(aa)},\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\beta^{(n)}_{a,a,\ldots,a,b} &= \frac{1}{n^2} \{ (\operatorname{Tr}\gamma^b)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a}) \\ &\quad + (n-1)(\operatorname{Tr}\gamma^a)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,a,\ldots,a,b}) \\ &\quad + 2(n-1)\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(ab)} \\ &\quad + (n-1)(n-2)\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(aa),b} \},\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\beta^{(n)}_{a,\ldots,a,b,c} &= \frac{1}{n^2} \{ (n-2)(\operatorname{Tr}\gamma^a)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,b,c}) \\ &\quad + (\operatorname{Tr}\gamma^b)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,c}) \\ &\quad + (\operatorname{Tr}\gamma^c)(\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,b}) + 2\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(bc)} \\ &\quad + 2(n-2)\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(ac),b} \\ &\quad + 2(n-2)\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(ab),c} \\ &\quad + (n-2)(n-3)\operatorname{Tr}\beta^{(n-1)}_{a,\ldots,a,(aa),b,c} \}.\end{aligned} \tag{40}$$

On établit également à partir des définitions la règle de composition que nous utiliserons plus loin

$$\begin{aligned}\beta^{(n)}_{a,\ldots,a,c}\beta^{(n)}_{b,\ldots,b,d} &= \frac{1}{n} \beta^{(n)}_{(ab),\ldots,(ab),(cd)} \\ &\quad + \frac{n-1}{n} \beta^{(n)}_{(ab),\ldots,(ab),(ad),(cb)}.\end{aligned} \tag{41}$$

La relation de Pauli

$$\Sigma_A (\gamma^A)_{i_r l_r} (\gamma^A)_{i_s l_s} = 4\,\delta_{i_r l_s} \delta_{i_s l_r} \tag{42}$$

et la relation

$$(\gamma^a)_{i_r l_r} \ldots (\gamma^a)_{i_s l_s} \eta^{(n)} = (\gamma^a)_{i_r l_s} \ldots (\gamma^a)_{i_s l_r} \eta^{(n)} \tag{43}$$

entraînent des relations entre matrices $\beta^{(n)}_{a_1 \ldots a_n}$. Celles-ci sont la transposition des relations bien connues de la théorie de Dirac déduites de (42).

Nous citerons seulement les identités

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mu} \beta^{(n)}_{a_1,\ldots,\mu,\ldots,\mu,\ldots,a_n} \\
&\quad = -\sum_{\mu} \beta^{(n)}_{a_1,\ldots,5\,\mu,\ldots,5\,\mu,\ldots,a_n} \\
&\quad = \beta^{(n)}_{a_1,0,\ldots,0,\ldots,a_n} - \beta^{(n)}_{a_1,\ldots,5,\ldots,\ldots,5,a_n}, \\
&\sum_{[\mu\nu]} \beta^{(n)}_{a_1,\ldots,[\mu\nu],\ldots,[\mu\nu],\ldots,a_n} \\
&\quad = -[\beta_{a_1,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,a_n} + \beta_{a_1,\ldots,5,\ldots,5,\ldots,a_n}], \\
&\sum_{\mu} \beta^{(n)}_{a_1,\ldots,\mu,\ldots,5\,\mu,\ldots,a_n} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Dans la représentation corpusculaire utilisant l'équation (4), la densité de présence est représentée par l'opérateur A_0 dont les valeurs propres sont les nombres

$$a_p = (-1)^{n+p-1}\frac{n-2p}{n} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n).$$

Par exemple, pour $n = 3$ $\left(\text{spin total } \frac{3}{2}\hbar\right)$, on a

$$a_p = 1 \quad \text{et} \quad a_p = -\frac{1}{3}.$$

Dans notre théorie, la densité de présence associée à l'opérateur A_0 est la quantité

$$\rho = \psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}(A_0)_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n}\psi_{(l_1\ldots l_n)}, \qquad (45)$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\alpha_4)_{i_1 l_1}\cdots(\alpha_0)_{i_r l_r}\cdots(\alpha_4)_{i_n l_n}.$$

Or la symétrie des ψ en $(i_1\ldots i_n)$ et $(l_1\ldots l_n)$ entraîne

$$\begin{aligned}
&\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}[\cdots(\alpha_a)_{i_r l_r}\cdots(\alpha_b)_{i_s l_s}\cdots]\,\psi_{(l_1\ldots l_n)} \\
&= \psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}[\cdots(\alpha_b)_{i_r l_r}\cdots(\alpha_a)_{i_s l_s}\cdots]\,\psi_{(l_1\ldots l_n)}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\rho = \psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}(\alpha_4)_{i_1 l_1}\cdots(\alpha_0)_{i_r l_r}\cdots(\alpha_4)_{i_n l_n}\psi_{(l_1\ldots l_n)} \qquad (46)$$

quel que soit r.

Avec la représentation de α_4 indiquée précédemment, on a

$$(\alpha_4)_{i_r l_r} = -(-1)^{i_r}\delta_{i_r l_r}$$

et, par suite,

$$\rho = \psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}(-1)^{n-1}(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n}(-1)^{i_r}\psi_{(i_1\ldots i_n)} \qquad (47)$$

prend la même valeur quel que soit i_r. Ceci exige que tous les i_r possèdent la même parité. ρ ne fait donc intervenir que des i_r soit tous pairs, soit tous impairs.

On a alors

$$\left.\begin{aligned}
\rho_{i\,\text{pairs}} &= (-1)^{n-1}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi_{(i_1\ldots i_n)}, \\
\rho_{i\,\text{impairs}} &= \psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi_{(i_1\ldots i_n)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Nous voyons apparaître deux cas selon la parité de n.

1° *n impair* (*spin demi-entier*). — Quelle que soit la parité des i,

$$\rho = \sum_{i\,\text{pairs}}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi_{(i_1\ldots i_n)} + \sum_{i\,\text{impairs}}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi_{(i_1\ldots i_n)} \qquad (49)$$

est une forme définie positive.

On peut considérer que dans ce cas l'opérateur $A_0\eta^{(n)}$ correspondant à ρ ne possède que les valeurs propres 0 et $+1$. La densité de présence est toujours définie positive.

2° *n pair* (*spin entier*)

$$\rho = -\sum_{i\,\text{pairs}}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi_{(i_1\ldots i_n)} + \sum_{i\,\text{impairs}}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}\psi^{\star}_{(i_1\ldots i_n)}. \qquad (50)$$

L'opérateur densité de présence possède dans ce cas les valeurs propres 0, $+1$, -1. La densité de présence n'est plus dans tous les cas définie positive.

Si l'on cherche les solutions « ondes planes monochromatiques » représentant un corpuscule libre d'énergie, impulsion et masse propre réduites $+K$, $\mathbf{K}$, μ (définie par le vecteur $\mathbf{K}$) soit

$$\begin{aligned}
\psi_{(i_1\ldots i_n)} &= \psi^{+}_{(i_1\ldots i_n)}(\mathbf{K}, x, t) + \psi^{-}_{(i_1\ldots i_n)}(\mathbf{K}, x, t) \\
&= u^{+}_{(i_1\ldots i_n)}\,e^{i[Kct-(\mathbf{Kx})]} + u^{-}_{(i_1\ldots i_n)}\,e^{i[-Kct-(\mathbf{Kx})]},
\end{aligned} \qquad (51)$$

on voit facilement par une généralisation des résultats de la théorie du corpuscule de spin $\frac{\hbar}{2}$ que les amplitudes $u^{+}_{(i_1\ldots i_n)}$ et $u^{-}_{(i_1\ldots i_n)}$ se représentent par les expressions

$$\left.\begin{aligned}
u^{+}_{(i_1\ldots i_n)} &= \lambda^{+}\eta^{(n)}_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} \\
&\quad\times\left(\prod_{r=1}^{n}[K-(\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})-\mu\alpha_4]_{l_r, m_r 2}\right)C^{+}_{m_1\ldots m_n}, \\
u^{-}_{(i_1\ldots i_n)} &= \lambda^{-}\eta^{(n)}_{i_1\ldots i_n;\, l_1\ldots l_n} \\
&\quad\times\left(\prod_{r=1}^{n}[K+(\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})+\mu\alpha_4]_{l_r, m_r 1}\right)C^{-}_{m_1\ldots m_n},
\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

avec

$$i_1, \ldots, i_n, l_1, \ldots, l_n = 1, 2, 3, 4; \qquad m_1, \ldots, m_n = 1, 2;$$

λ^{+} et λ^{-} sont des facteurs de normalisation.

Ces expressions s'écrivent encore

$$\left.\begin{aligned}
u^{+}_{(i_1\ldots i_n)} &= \lambda^{+}\left(\prod_{r=1}^{n}[K-(\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})-\mu\alpha_4]_{i_r, m_r 2}\right)C^{+}_{(m_1\ldots m_n)}, \\
u^{-}_{(i_1\ldots i_n)} &= \lambda^{-}\left(\prod_{r=1}^{n}[K+(\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})+\mu\alpha_4]_{i_r, m_r 1}\right)C^{-}_{(m_1\ldots m_n)};
\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

$C^{+}_{(m_1\ldots i_n)}$ et $C^{-}_{(m_1\ldots m_n)}$ sont des constantes fonctions

symétriques des indices $m_1, \ldots, m_n$. On a donc $n+1$ constantes C^+ et $n+1$ constantes C^-.

Pour déterminer λ^+ et λ^-, nous devons évaluer la densité de présence

$$\int \psi^\star A_0 \psi \,\mathrm{d}\tau$$

pour chacun des états ψ^+ et ψ^-.

On obtient immédiatement

$$\int_v \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} A_0 \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = v(\lambda^{\pm})^2 2^n K(K+\mu)^n (\mp\mu)^{n-1} C^{\pm\star}_{(m_1\ldots m_n)} C^{\pm}_{(m_1\ldots m_n)}. \quad (54)$$

Nous choisirons les constantes $C^{\pm}_{(m_1\ldots m_n)}$ de telle sorte que l'on ait

$$C^{\pm\star}_{(m_1\ldots m_n)} C^{\pm}_{(m_1\ldots m_n)} = 1. \quad (55)$$

Alors suivant la parité de n, nous aurons des conditions de normalisation différentes.

1° *Si n est impair.* — La condition unique

$$\int_v \psi^{\pm\star}_{(i_1\ldots i_n)} A_0 \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = 1 \quad (56)$$

sera réalisée si nous prenons

$$\lambda^+ = \lambda^- = [2^n K(K+\mu)^n \mu^{n-1} v]^{-\frac{1}{2}}. \quad (57)$$

2° *Si n est pair.* — Nous aurons des conditions de normalisation différentes pour les ondes ψ^+ et ψ^-. λ^+ et λ^- seront encore donnés par (57) avec les deux conditions

$$\left.\begin{aligned} &\int_v \psi^{+\star}_{(i_1\ldots i_n)} A_0 \psi^{+}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = -1, \\ &\int_v \psi^{-\star}_{(i_1\ldots i_n)} A_0 \psi^{-}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = +1. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

On peut voir facilement que cette normalisation est invariante dans une transformation de Lorentz.

En effet, si l'on considère la transformation $t \to -t$, $x \to x$, renversement de l'axe du temps correspondant au passage d'une onde à énergie positive à une onde à énergie négative, la conservation de la forme de l'équation des ondes conduit à effectuer sur ψ la substitution $\psi' = S\psi$, avec

$$S^{(n)} = \prod_{r=1}^{n} (\alpha_5)_{i_r l_r} \qquad (\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4). \quad (59)$$

Celle-ci donne :

Pour n impair

$$\left.\begin{aligned} S^{-1}A_4 S = -A_4, \qquad S^{-1}A_p S = -A_p, \\ S^{-1}A_0 S = A_0; \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Pour n pair

$$\left.\begin{aligned} S^{-1}A_4 S = A_4, \qquad S^{-1}A_p S = A_p, \\ S^{-1}A_0 S = -A_0. \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Il en résulte que l'invariance de la normalisation dans la transformation faisant passer des ondes à énergie positive aux ondes à énergie négative exige l'introduction de deux normes de signes contraires pour ces ondes.

Si l'on évalue avec les expressions ci-dessus l'intégrale

$$\int \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau,$$

on obtient la relation

$$\int \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = (\mp 1)^{n-1} \left(\frac{K}{\mu}\right)^{n-1} \times \int \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} A_0 \psi^{\pm}_{(i_1\ldots i_n)} \,\mathrm{d}\tau = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{n-1} \quad (62)$$

que nous utiliserons plus loin.

2. Calcul de la section efficace de diffusion électromagnétique dans le choc de deux corpuscules de spin quelconque. — Nous allons maintenant évaluer dans le cadre de la théorie précédente la section efficace de diffusion électromagnétique coulombienne correspondant au choc de deux corpuscules A et B discernables, de masses propres m_A, m_B, de charges e_A, e_B, de spin total $S_A = n\frac{\hbar}{2}$, $S_A = m\frac{\hbar}{2}$, supposés libres et représentés par des ondes planes à énergies positives dans l'état initial et dans l'état final.

Nous admettons donc que, dans l'état initial, les corpuscules (A) et (B) dans les états (A_0), (B_0) caractérisés par les énergies, impulsions et masses propres réduites

$$K_{A_0},\ \mathbf{K}_{A_0},\ \mu_A \quad (K^2_{A_0} = \mathbf{K}^2_{A_0} + \mu^2_A),$$
$$K_{B_0},\ \mathbf{K}_{B_0},\ \mu_B \quad (K^2_{B_0} = \mathbf{K}^2_{B_0} + \mu^2_B),$$

sont représentés par les ondes planes à énergie positive normées dans le volume unité

$$u^{+(A_0)}_{(i_1\ldots i_n)} e^{i[K_{A_0}ct - (\mathbf{K}_{A_0}\mathbf{x})]}, \qquad u^{+(B_0)}_{(i_1\ldots i_m)} e^{i[K_{B_0}ct - (\mathbf{K}_{B_0}\mathbf{x})]}.$$

Dans le choc, ces corpuscules échangent la quantité de mouvement

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}_{A_0} - \mathbf{K}_{A_1} = \mathbf{K}_{B_1} - \mathbf{K}_{B_0}$$

par l'intermédiaire d'un corpuscule de champ vectoriel de spin $\hbar$ (k, $\mathbf{k}$, μ_0, $k^2 = \mathbf{k}^2 + \mu_0^2$), $\mu_0 \to 0$ lorsque ce corpuscule est un photon, ce que nous supposons ici.

Dans l'état final, (A) et (B) se trouvent dans les états (A_1), (K_{A_1}, $\mathbf{K}_{A_1}$, μ_A) et (B_1), (K_{B_1}, $\mathbf{K}_{B_1}$, μ_B) représentés par les ondes planes à énergies positives normées dans le volume unité.

$$u^{+(A_1)}_{(i_1\ldots i_n)} e^{i[K_{A_1}ct - (\mathbf{K}_{A_1}\mathbf{x})]}, \qquad u^{+(B_1)}_{(i_1\ldots i_m)} e^{i[K_{B_1}ct - (\mathbf{K}_{B_1}\mathbf{x})]}$$

La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le processus global nous donne les relations :

$$K_{A_0}+K_{B_0}=K_{A_1}+K_{B_1}, \qquad \mathbf{K}_{A_0}+\mathbf{K}_{B_0}=\mathbf{K}_{A_1}+\mathbf{K}_{B_1}. \quad (63)$$

Suivant des notations que nous avons déjà utilisées dans plusieurs Mémoires antérieurs, nous écrirons ici

$$\left.\begin{array}{c} K_{ij}=-K_iK_j+(\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j), \\ q_{ij}=K_{ij}-\mu_i\mu_j=-K_iK_j+(\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j)+\mu_i\mu_j, \\ q_{i\bar{j}}=K_{ij}-\mu_i\mu_j=q_{ij}+2\mu_i\mu_j, \\ q_{ii}=0, \qquad K_{ii}=-\mu_i^2, \qquad q_{\bar{i}\bar{i}}=-2\mu_i^2 \\ (i,j=A_0,B_0,A_1,B_1). \end{array}\right\} \quad (64)$$

Les relations de conservation (63), nous donnent alors :

$$\left.\begin{array}{c} q_{A_0B_0}=q_{A_1B_1}, \qquad q_{A_0A_1}=q_{B_0B_1}, \qquad q_{A_0B_1}=q_{B_0A_1}, \\ q_{A_0A_1}=q_{A_0B_0}-q_{A_0B_1}=K_{A_0B_0}-K_{A_0B_1}. \end{array}\right\} \quad (65)$$

Un calcul général que nous avons donné ailleurs [4] valable pour toutes les équations d'ondes linéaires conduisant à une équation de conservation pour un vecteur-courant par l'intermédiaire duquel a lieu l'interaction électromagnétique conduit à l'élément de matrice de diffusion généralisant la formule de Møller qui s'écrit ici :

$$\left.\begin{array}{c} H'^{(1)}{}^{(n)}_{A_0A_1;}{}^{(m)}_{B_0B_1}=\dfrac{e_Ae_B}{2q_{A_0A_1}}\,(u_{A_0}^{+*}A^{(n)\lambda}u_{A_1}^+)\,(u_{B_0}^{+*}A^{(m)}{}_\lambda u_{B_1}^+) \\ (\lambda=0,p;\,p=1,2,3), \end{array}\right\} \quad (66)$$

avec ici

$$\left.\begin{array}{l} A_0^{(n)}=-A^{(n)0}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(\alpha_4)_{i_1l_1}\dots(\alpha_0)_{i_rl_r}\dots(\alpha_4)_{i_nl_n}, \\ A_p^{(n)}=\quad A^{(n)p}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(\alpha_4)_{i_1l_1}\dots(\alpha_p)_{i_rl_r}\dots(\alpha_4)_{i_nl_n}. \end{array}\right\} \quad (67)$$

La section efficace de diffusion du corpuscule (A) dans l'angle solide $d\Omega_{\mathbf{K}_{A_1}}$ autour de la direction $\mathbf{K}_{A_1}$ tandis que (B) recule dans la direction $\mathbf{K}_{B_1}$ a pour expression

$$d\sigma=\frac{1}{4\pi^2\hbar^2c^2} \times\frac{|\mathbf{K}_{A_1}|^3K_{A_0}K_{B_0}K_{A_1}K_{B_1}\,d\Omega_{\mathbf{K}_{A_1}}}{[(K_{A_0B_0})^2-\mu_A^2\mu_B^2]^{\frac{1}{2}}[\mathbf{K}_{A_1}(K_{B_1}\mathbf{K}_{A_1}-K_{A_1}\mathbf{K}_{B_1})]} \times\overline{|H'^{(1)}{}^{(n)}_{A_0A_1;}{}^{(m)}_{B_0B_1}|^2}, \quad (68)$$

$|H'^{(1)}|^2$ représente le carré de l'élément de matrice $H'^{(1)}$ sur lequel on a effectué une sommation sur tous les états de mouvement et une moyenne sur les états de spin de l'état initial.

Nous avons vu que pour chaque état de mouvement d'un corpuscule de spin $n\frac{\hbar}{2}$, il y a $n+1$ ondes planes à énergie positive indépendantes.

Nous écrirons donc :

$$\overline{H'^{(1)\,2}}=\frac{e_A^2e_B^2}{4(q_{A_0A_1})^2(n+1)(m+1)} \times\sum_{u_{A_0}}\sum_{u_{A_1}}\sum_{u_{B_0}}\sum_{u_{B_1}} \times[u_{A_0}^{+*}A^{(n)\lambda}u_{A_1}^+]\,[u_{A_1}^{+*}A^{(n)\varkappa}u_{A_0}] \times[u_{B_0}^{+*}A^{(m)}{}_\lambda u_{B_1}^+]\,[u_{B_1}^{+*}A^{(m)}{}_\varkappa u_{B_0}^+]. \quad (69)$$

On passe des fonctions u^+ correspondant aux ondes à énergie positive à une amplitude u générale par une généralisation immédiate de la méthode de Casimir en considérant l'amplitude à énergie positive résultant d'une projection convenable.

On pose ici

$$u^+_{(i_1\dots i_n)}=\frac{1}{(2K)^n}\,[\Lambda^{(n)}]_{i_1\dots i_n;\,l_1\dots l_n}\,u_{(l_1\dots l_n)}, \quad (70)$$

avec

$$[\Lambda^{(n)}]_{i_1\dots i_n;\,l_1\dots l_n}=\prod_{r=1}^{n}[K-(\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})-\mu\alpha_4)_{i_rl_r}. \quad (71)$$

On voit alors que

$$(\Lambda^{(n)})^2=(2K)^n\Lambda^{(n)}. \quad (72)$$

Introduisant ces projecteurs pour les états A_0, B_0, A_1, B_1, on obtient alors

$$(u_{A_0}^{+*}A^{(n)\lambda}u_{A_1}^+)\,(u_{A_1}^{+*}A^{(n)\varkappa}u_{A_0}^+) =\frac{1}{(4K_{A_0}K_{A_1})^{2n}}\,[u_{A_0}^*\Lambda_{A_0}^{(n)}A^{(n)\lambda}\Lambda_{A_1}^{(n)}u_{A_1}] \times[u_{A_1}^*\Lambda_{A_1}^{(n)}A^{(n)\varkappa}\Lambda_{A_0}^{(n)}u_{A_0}]. \quad (73)$$

Pour effectuer la sommation sur les états u_{A_0}, u_{A_1}, et nous ramener à un calcul de traces, nous ne pouvons pas utiliser la relation usuelle du produit des matrices

$$\sum_{u'}(u_1^*Au')(u'^*Bu_2)=u_1^*(AB)u_2, \quad (74)$$

car dans la théorie considérée ici, la normalisation n'est pas effectuée par $\int\psi^*\psi\,d\tau$, mais par $\int\psi^*A_0\psi\,d\tau$.

Toutefois nous avons établi par la relation (62) une relation entre ces normes, ce qui fait que nous devons ici remplacer (74) par

$$\sum_{u'}(u_1^*Au')(u'Bu_2)=\left(\frac{K}{\mu}\right)^{n-1}u_1^*(AB)u_2. \quad (75)$$

Nous obtenons alors

$$\sum_{u_{A_0}}\sum_{u_{A_1}}(u_{A_0}^{+*}A^{(n)\lambda}u_{A_1}^+)\,(u_{A_1}^{+*}A^{(n)\varkappa}u_{A_0}^+) =\frac{1}{4K_{A_0}K_{A_1}(2\mu_A)^{2(n-1)}}\,\mathrm{Tr}\,[\Lambda_{A_0}^{(n)}A^{(n)\lambda}\Lambda_{A_1}^{(n)}A^{(n)\varkappa}\eta^{(n)}]. \quad (76)$$

L'expression (69) s'écrit maintenant :

$$\overline{\left| H'^{(1)}{}^{(n)}_{A_0 A_1;}{}^{(m)}_{B_0 B_1} \right|^2} = \frac{e_A^2 e_B^2 S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}^{\lambda\varkappa} S_{B_0 B_1;\lambda\varkappa}^{(m)}}{\left\{ \begin{array}{l} 4(q_{A_0 A_1})^2 (n+1)(m+1) \\ \quad \times 16 K_{A_0} K_{B_0} K_{A_1} K_{B_1} (2\mu_A)^{2(n-1)} (2\mu_B)^{2(m-1)} \end{array} \right\}} \tag{77}$$

en posant

$$\left. \begin{array}{l} S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}^{\lambda\varkappa} = \mathrm{Tr}\left[\Lambda_{A_0}^{(n)} A^{(n)\lambda} \Lambda_{A_1}^{(n)} A^{(n)\varkappa} \eta^{(n)} \right], \\ S_{B_0 B_1;\lambda\varkappa}^{(m)} = \mathrm{Tr}\left[\Lambda_{B_0}^{(m)} A^{(m)}{}_\lambda \Lambda_{B_1}^{(m)} A^{(m)}{}_\varkappa \eta^{(m)} \right]. \end{array} \right\} \tag{78}$$

Nous sommes donc ramenés à un calcul de traces. L'on passe de l'expression (78) de $S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}^{\lambda\varkappa}$ écrite en matrices α^μ à l'expression correspondante écrite en matrices γ^μ en introduisant le facteur $(-1)^{n-1}$.

On a alors avec maintenant

$$\Lambda^{(n)} = \prod_{r=1}^{n} \left[K^\rho \gamma_\rho - i\mu \right]_{l_r l'_r}, \tag{79}$$

$$S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}^{\lambda\varkappa} = (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\left[\Lambda_{A_0}^{(n)} \Gamma^{(n)\lambda} \Lambda_{A_1}^{(n)} \Gamma^{(n)\varkappa} \eta^{(n)} \right]. \tag{80}$$

Nous introduirons les notations abrégées

$$\gamma^{a_0} = K_{A_0}^\mu \gamma_\mu - i\mu_A, \qquad \gamma^{a_1} = K_{A_1}^\nu \gamma_\nu - i\mu_A. \tag{81}$$

En utilisant la relation (41) donnant l'expression du produit de deux matrices $\beta^{(n)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(n)} &= (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\left[\Gamma^{(n)}_{a_0, \ldots, a_0, (a_0\lambda)} \Gamma^{(n)}_{a_1, \ldots, a_1, (a_1\varkappa)} \eta^{(n)} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}\left[\beta^{(n)}_{a_0, \ldots, a_0, (a_0\lambda)} \beta^{(n)}_{a_1, \ldots, a_1, (a_1\varkappa)} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\, \beta^{(n)}_{(a_0 a_1), \ldots, (a_0 a_1), (a_0\lambda a_1\varkappa)} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{n-1}{n} \mathrm{Tr}\, \beta^{(n)}_{(a_0 a_1), \ldots, (a_0 a_1), (a_0\lambda a_1), (a_0 a_1\varkappa)} \right\}. \end{aligned} \tag{82}$$

L'évaluation de ces traces s'effectue par récurrence au moyen des formules (38), (39), (40).

On obtient ainsi sans difficulté

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\, \beta^{(n)}_{(a_0 a_1), \ldots, (a_0 a_1)} = (n+1)(2 q_{\bar{A}_0 A_1})^n, \\ &\mathrm{Tr}\, \beta^{(n)}_{(a_0 a_1), \ldots, (a_0 a_1), (a_0\lambda a_1\varkappa)} \\ &= 2(n+1)(2 q_{\bar{A}_0 A_1})^{n-1} \left[K_{A_0}^\lambda K_{A_1}^\varkappa + K_{A_1}^\lambda K_{A_0}^\varkappa - q_{A_0 A_1} \delta^{\lambda\varkappa} \right], \\ &\mathrm{Tr}\, \beta^{(n)}_{(a_0 a_1), \ldots, (a_0 a_1), (a_0\lambda a_1), (a_0 a_1\varkappa)} \\ &\quad = \frac{4}{3}(n+1)(2 q_{\bar{A}_0 A_1})^{n-2} \\ &\qquad \times \left\{ q_{\bar{A}_0 A_1} \left(K_{A_0}^\lambda K_{A_1}^\varkappa + K_{A_1}^\lambda K_{A_0}^\varkappa - q_{A_0 A_1} \delta^{\lambda\varkappa} \right) \right. \\ &\qquad \left. - 2\mu_A^2 \left(K_{A_0}^\lambda + K_{A_1}^\lambda \right) \left(K_{A_0}^\varkappa + K_{A_1}^\varkappa \right) \right\}. \end{aligned} \tag{83}$$

Nous obtenons alors après réduction

$$\begin{aligned} S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(n)} &= (-1)^n \frac{4(n+1)}{3n} (2 q_{\bar{A}_0 A_1})^{n-2} \\ &\quad \times \left\{ 2(n-1)\mu_A^2 \left(K_{A_0}^\lambda + K_{A_1}^\lambda \right) \left(K_{A_0}^\varkappa + K_{A_1}^\varkappa \right) \right. \\ &\qquad - (n+2) q_{\bar{A}_0 A_1} \\ &\qquad \left. \times \left(K_{A_0}^\lambda K_{A_1}^\varkappa + K_{A_1}^\lambda K_{A_0}^\varkappa - q_{A_0 A_1} \delta^{\lambda\varkappa} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{84}$$

Cette expression n'est valable que pour $n \geqq 1$ $\left(\text{corpuscule de spin } n \frac{\hbar}{2} \right)$.

Pour les spins 0 et $\frac{\hbar}{2}$ $(n = 1)$, on a les expressions

$$\left. \begin{array}{l} S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(0)} = \dfrac{\left(K_{A_0}^\lambda + K_{A_1}^\lambda \right) \left(K_{A_0}^\varkappa + K_{A_1}^\varkappa \right)}{(2\mu_A)^2}, \\ S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(1)} = 4\left[K_{A_0}^\lambda K_{A_1}^\varkappa + K_{A_1}^\lambda K_{A_0}^\varkappa - q_{A_0 A_1} \delta^{\lambda\varkappa} \right]. \end{array} \right\} \tag{85}$$

En introduisant ces expressions dans (84), celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(n)} &= (-1)^n \frac{(n+1)}{3n} (2 q_{\bar{A}_0 A_1})^{(n-2)} \\ &\quad \left\{ 2(n-1)(2\mu_A)^4 S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(0)} \right. \\ &\qquad \left. - (n+2) q_{\bar{A}_0 A_1} S_{A_0 A_1;\lambda\varkappa}^{(1)} \right\}. \end{aligned} \tag{86}$$

Cette relation montre que l'analyse de la diffusion entre corpuscules de spin n et m se ramènera à une combinaison avec des poids convenables de diffusions entre corpuscules de spin 0 et $\frac{\hbar}{2}$.

Écrivant

$$S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}^{\lambda\varkappa} S_{B_0 B_1;\lambda\varkappa}^{(m)} = 16(n+1)(m+1) S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}_{B_0 B_1}^{(m)}, \tag{87}$$

on obtient l'expression

$$\begin{aligned} &S_{A_0 A_1;}^{(n)}{}_{B_0 B_1}^{(m)} \\ &= \frac{(-1)^{n+m}}{9mn} (2 q_{\bar{A}_0 A_1})^{n-2} (2 q_{\bar{B}_0 B_1})^{m-2} \\ &\quad \times \left\{ 16(n-1)(m-1)\mu_A^2 \mu_B^2 (K_{A_0 B_0} + K_{A_0 B_1})^2 \right. \\ &\qquad - 4(n-1)(m+2)\mu_A^2 q_{\bar{B}_0 B_1} \\ &\qquad\quad \times \left[(K_{A_0 B_0} + K_{A_0 B_1})^2 - q_{A_0 A_1} q_{\bar{A}_0 A_1} \right] \\ &\qquad - 4(m-1)(n+2)\mu_B^2 q_{\bar{A}_0 A_1} \\ &\qquad\quad \times \left[(K_{A_0 B_0} + K_{A_0 B_1})^2 - q_{A_0 A_1} q_{\bar{B}_0 B_1} \right] \\ &\qquad + 2(n+2)(m+2) q_{\bar{A}_0 A_1} q_{\bar{B}_0 B_1} \\ &\qquad\quad \left. \times \left[(K_{A_0 B_0})^2 + (K_{A_0 B_1})^2 + q_{A_0 A_1}(\mu_A^2 + \mu_B^2) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{88}$$

Tenant compte des relations

$$\left. \begin{array}{l} (K_{A_0 B_0} + K_{A_0 B_1})^2 = (q_{A_0 A_1})^2 + 4 K_{A_0 B_0} K_{A_0 B_1}, \\ (K_{A_0 B_0} + K_{A_0 B_1})^2 - q_{A_0 A_1} q_{\bar{A}_0 A_1} \\ \qquad = 4 K_{A_0 B_0} K_{A_0 B_1} + 2\mu_A^2 q_{A_0 A_1}, \\ 2\left[(K_{A_0 B_0})^2 + (K_{A_0 B_1})^2 + q_{A_0 A_1}(\mu_A^2 + \mu_B^2) \right] \\ \qquad = 4 K_{A_0 B_0} K_{A_0 B_1} + 2(q_{A_0 A_1})^2 + 2 q_{A_0 A_1}(\mu_A^2 + \mu_B^2), \end{array} \right\} \tag{89}$$

nous obtenons les expressions générales suivantes :

$$\overline{|H^{(1)}{}^{(n)}_{A_0A_1;}{}^{(m)}_{B_0B_1}|^2}$$

$$= \frac{e_A^2 e_B^2}{4(q_{A_0A_1})^2\, 16 K_{A_0}K_{B_0}K_{A_1}K_{B_1}} \frac{(-1)^{n+m}}{9mn}\left(\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\right)^{n-2}\left(\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\right)^{m-2}$$

$$\times\Big\{16(n-1)(m-1)(K_{A_0B_0}+K_{A_0B_1})^2 + 8(n+2)(m+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}[(K_{A_0B_0})^2+(K_{A_0B_1})^2+q_{A_0A_1}(\mu_A^2+\mu_B^2)]$$

$$-8(n-1)(m+2)\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}[(K_{A_0B_0}+K_{A_0B_1})^2 - q_{A_0A_1}q_{\bar A_0A_1}]$$

$$-8(m-1)(n+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}[(K_{A_0B_0}+K_{A_0B_1})^2 - q_{A_0A_1}q_{\bar B_0B_1}]\Big\}$$

$$= \frac{e_A^2 e_B^2}{4(q_{A_0A_1})^2\, 16 K_{A_0}K_{B_0}K_{A_1}K_{B_1}} \frac{(-1)^{n+m}}{9mn}\left(\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\right)^{n-2}\left(\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\right)^{m-2}$$

$$\times\Big\{16K_{A_0B_0}K_{A_0B_1}\left[2(n-1)-(n+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\right]\left[2(m-1)-(m+2)\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\right] + 16(n-1)(m-1)(q_{A_0A_1})^2$$

$$-16(n-1)(m+2)\mu_A^2 q_{A_0A_1}\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2} - 16(m-1)(n+2)\mu_B^2 q_{A_0A_1}\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}$$

$$+ 8(n+2)(m+2)[(q_{A_0A_1})^2 + q_{A_0A_1}(\mu_A^2+\mu_B^2)]\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\Big\}. \quad (90)$$

Si nous introduisons les valeurs de $|H^{(1)(n)(m)}|^2$ correspondant à n, $m = 0$, 1 soient en posant

$$f = \frac{e_A^2 e_B^2}{4(q_{A_0A_1})^2\, 16K_{A_0}K_{B_0}K_{A_1}K_{B_1}},$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{|H^{(1)}_{(0)(0)}|^2} &= f\,4[K_{A_0B_0}+K_{A_0B_1}]^2,\\ \overline{|H^{(1)}_{(1)(1)}|^2} &= f\,8[(K_{A_0B_0})^2+(K_{A_0B_1})^2+q_{A_0A_1}(\mu_A^2+\mu_B^2)],\\ \overline{|H^{(1)}_{(0)(1)}|^2} &= f\,4[(K_{A_0B_0}+K_{A_0B_1})^2 - q_{A_0A_1}q_{\bar A_0A_1}].\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Nous pouvons écrire (90) sous la forme :

$$\overline{|H'^{(1)}{}^{(n)}_{A_0A_1;}{}^{(m)}_{B_0B_1}|^2} = \frac{(-1)^{n+m}}{9mn}\left(\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\right)^{n-2}\left(\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\right)^{m-2}$$

$$\times\Big\{4(n-1)(m-1)\overline{|H^{(1)}_{(0)(0)}|^2} - 2(n-1)(m+2)\frac{q_{B_0B_1}}{2\mu_B^2}\overline{|H'^{(1)}_{(0)(1)}|^2} - 2(m-1)(n+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\overline{|H'^{(1)}_{(1)(0)}|^2} + (n+2)(m+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\overline{|H'^{(1)}_{(1)(1)}|^2}\Big\},$$

Si nous reportons cette expression dans la formule générale de la section efficace $d\sigma_{(n)(m)}$ d'un corpuscule (A) de spin $n\frac{\hbar}{2}$ par un corpuscule (B) de spin $m\frac{\hbar}{2}$, nous voyons que celle-ci s'exprime simplement au moyen de $d\sigma_{(0)(0)}$, $d\sigma_{(0)(1)}$, $d\sigma_{(1)(0)}$ et $d\sigma_{(1)(1)}$.

On obtient ainsi :

$$d\sigma_{(n)(m)} = \frac{(-1)^{n+m}}{9mn}\left(\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\right)^{n-2}\left(\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}\right)^{m-2}$$

$$\times\Big\{4(n-1)(m-1)\,d\sigma_{(0)(0)} - 2(n-1)(m+2)\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}d\sigma_{(0)(1)} - 2(m-1)(n+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}d\sigma_{(1)(0)} + (n+2)(m+2)\frac{q_{\bar A_0A_1}}{2\mu_A^2}\frac{q_{\bar B_0B_1}}{2\mu_B^2}d\sigma_{(1)(1)}\Big\}.$$

Ces diverses relations résolvent complètement le problème que nous nous sommes proposé d'étudier en donnant l'expression de la section efficace de diffusion coulombienne dans le choc de deux corpuscules de spin $n\frac{\hbar}{2}$ et $m\frac{\hbar}{2}$. Toutefois, elles reposent sur l'hypothèse que l'interaction avec le champ électromagnétique s'exerce sur le vecteur densité-courant $\Gamma^{(n)}_{\mu,0,\ldots,0}$ et non pas sur l'un des autres quadrivecteurs conservatifs que la théorie permet de construire. On voit facilement que ceux-ci se ramèneraient à des formes que l'on écrit

$$\Gamma^{(n)}_{\mu,\underbrace{5,\ldots,5}_{2p},0,\ldots,0}.$$

Les sections efficaces de diffusion correspondantes s'évalueraient sans difficulté par une extension immédiate de la méthode que nous avons utilisée ci-dessus.

Manuscrit reçu le 5 janvier 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Kramers H. A., Belinfante F. J. et Lubanski J. K. — *Physica*, 1941, **8**, 597.
[2] Lubanski J. K. — *Physica*, 1942, **9**, 310 et 325.
[3] Petiau G. — *J. Physique Rad.*, 1946, **7**, 124.
[4] Petiau G. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 137.

SUR LE MÉCANISME DE L'ÉLECTROLUMINESCENCE. I. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

Par DANIEL CURIE,
Laboratoire de Luminescence (P. C. B.),
Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — On rappelle d'abord les effets lumineux observés lors de l'application d'un champ électrique sur les corps solides luminescents : Électroluminescence ou effet Destriau d'excitation des centres; Électrophotoluminescence ou effet Gudden-Pohl de vidage des pièges.

Dans ce premier article, on expose le mécanisme proposé pour l'électroluminescence. L'article II étudiera les applications de ce mécanisme à la forme des ondes de brillance, à l'effet de la température, de la fréquence, etc.

On adopte ici comme base la conception de Destriau attribuant ces phénomènes aux chocs d'électrons accélérés dans la bande de conductibilité par le champ. On considère qu'il y a successivement :

1° Arrivée des électrons dans la bande à partir de niveaux donneurs vidés par le champ;

2° Accélération de ces électrons suivant un processus analogue à celui de la rupture diélectrique;

3° Perte d'énergie de l'électron accéléré, par choc sur un centre, piège ou défaut. Dans le premier cas, on aura l'effet Destriau, dans le second (si les pièges sont pleins), l'effet Gudden-Pohl.

D'autres hypothèses qui ont été envisagées pour l'électroluminescence — effets « de surface » d'émission lumineuse par jonctions $p — n$ ou « émission de champ » par effet tunnel de Zener — seront discutées en Appendice, en fin de l'article II.

1. **Introduction.** — Un champ électrique peut produire divers effets sur les corps solides luminescents :

— Surillumination par le champ d'une substance phosphorescente ayant subi une *photo*-excitation préalable (effet Gudden et Pohl [1]). C'est un phénomène d'*Électrophotoluminescence*;

— Excitation de la luminescence de substances fluorescentes ou phosphorescentes par la seule action du champ électrique (effet Destriau [2], [3]). C'est à cet effet déterminé que l'on réserve le nom d'*Électroluminescence*;

— Extinction de la photoluminescence par le champ (Destriau [4]).

Nous considérons ici exclusivement les effets lumineux, et plus particulièrement l'électroluminescence.

L'effet Gudden-Pohl contraste avec l'effet Destriau par la nécessité d'une photoexcitation préalable et par sa brièveté : éclair lumineux alors que l'électroluminescence se poursuit indéfiniment si l'on évite les phénomènes de polarisation par l'utilisation d'un champ alternatif.

Du point de vue théorique, l'électrophotoluminescence consiste en un *vidage par le champ des pièges* remplis par la photoexcitation antérieure, et l'électroluminescence en une *excitation des centres luminogènes* par le champ.

Les auteurs s'accordent actuellement à reconnaître que l'électroluminescence n'est pas un phénomène d'excitation par l'effluve : persistance très brève, conservation de l'émission dans l'huile ou dans le vide, décalage brillance-tension différent pour l'onde de brillance électroluminescente et pour l'effluve pour lequel il est égal à $\frac{\pi}{2}$ [5].

2. **Premier aperçu du mécanisme** (1). — L'effet Destriau s'interprète [3], [6] en admettant que *les électrons de la bande de conductibilité, accélérés par le champ, acquièrent une énergie leur permettant, par choc sur un centre luminogène, d'exciter celui-ci :*

$$e \text{ accéléré} + \text{centre} \rightarrow e \text{ lent} + \text{centre excité}, \quad (1)$$

suivant le processus classique d'excitation par chocs de première espèce.

La nécessité de faire intervenir la bande de conductibilité résulte de la nécessité d'une bonne cristallisation (2) pour observer l'électroluminescence. Une raison pour rejeter l'hypothèse de l'excitation du centre par action directe du champ sur l'électron dans le centre est que de nombreuses substances luminescentes (donc possédant des centres luminogènes), mais mal cristallisées, ne présentent pas

(1) On considère seulement l'électroluminescence des cristaux anorganiques, à l'exclusion de celle présentée par certains corps organiques (Bernanose [7]), de découverte encore trop récente. Rappelons que le mécanisme de la luminescence ordinaire est différent pour les cristaux anorganiques et pour les corps organiques.

(2) La condition de bonne cristallisation semble nécessaire, mais nullement suffisante.

l'effet Destriau; tels sont les CaS (Bi), insensibles ou très peu sensibles au champ.

De plus, G. Destriau a montré [3] que l'hypothèse (1) conduit immédiatement à une loi correcte de variation de la brillance B avec le champ électrique E. Pour acquérir une énergie égale à la profondeur $h\nu$ du centre (ν fréquence de la lumière émise), l'électron de conductibilité doit être accéléré sur un parcours ϖ dans la direction du champ (nous verrons au paragraphe 5 qu'il en est bien ainsi) donné par

$$h\nu = eE\varpi. \tag{2}$$

Si ϖ_m est le libre parcours moyen dans la direction

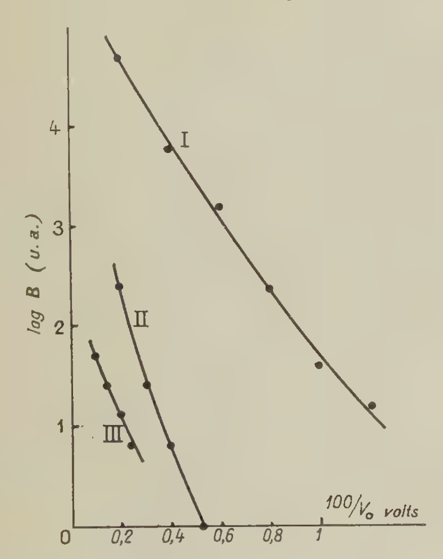


Fig. 1. — Variation de la brillance B avec la tension efficace appliquée V_0.

Courbe I : ZnS (Cu); courbe II : ZnS (Mn) étudiés par Destriau [3]. Courbe III : ZnS (Cu) étudié par Waymouth [8]. Épaisseur des cellules : de l'ordre de 0,1 mm.

du champ avant perte d'énergie, la brillance sera proportionnelle à la proportion d'électrons ayant un parcours au moins égal à ϖ :

$$B :: \exp\left(-\frac{\varpi}{\varpi_m}\right) = \exp\left(-\frac{b}{E}\right), \tag{3}$$

où

$$b = \frac{h\nu}{e\varpi_m}. \tag{4}$$

En réalité B est de la forme

$$B = f(E)\exp\left(-\frac{b}{E}\right), \tag{5}$$

où f, que nous interpréterons comme proportionnel au nombre d'électrons s'accélérant, est un facteur croissant avec le champ comme on le verra, mais lentement devant l'exponentielle.

On voit sur la figure 1 que le type de loi (3) est convenablement vérifié par l'expérience, bien mieux que les lois empiriques en E^n ($n = 2$ ou 3) proposées par divers auteurs. La courbure du graphique n'apparaît, en général, que pour des variations de brillance atteignant le facteur 1000.

Cette courbure — concavité systématique vers le haut — est attribuable à un facteur $f(E)$ croissant à peu près comme E^2 [3]. Je ferai observer que les effets de polarisation discutés dans le paragraphe 3, entraînant une diminution du champ interne E par rapport au champ appliqué E_0, surtout sensible aux fortes brillances, produiraient une courbure en sens inverse. On voit donc déjà que l'influence de ces effets est relativement faible aux fréquences employées (50 p/s par Destriau, 60 par Waymouth).

Plus b est grand (ϖ_m petit), plus le seuil est élevé, mais plus la variation de la brillance avec la tension est rapide au-dessus de ce seuil.

La connaissance de b permet d'évaluer, par (4), le parcours moyen ϖ_m. Pour différentes substances essayées, G. Destriau trouve ϖ_m variant entre 10^{-6} et 5.10^{-5} cm. Le parcours ϖ nécessaire pour que l'électron excite les centres est, d'après la relation (2), de quelques ϖ_m (par exemple $10\varpi_m$). Ces parcours sont donc très supérieurs aux dimensions des centres, ce qui exclut l'hypothèse de l'excitation directe de ceux-ci.

L'effet Gudden-Pohl s'interprète d'une façon analogue [9], [10] : l'accélération des électrons suivant un parcours ϖ' leur permet de vider les pièges de profondeur inférieure à $eE\varpi'$. D'où une *illumination fugace* si ces pièges ont été remplis par une excitation préalable.

J. Mattler et D. Curie ont ainsi montré [9] sur des ZnS (Cu), qu'un champ électrique de 30 000 V eff/cm vidait les pièges de profondeur inférieure à 0,75 eV; d'où pour ces sulfures :

$$\varpi' = 1,8.10^{-5}\ \text{cm}.$$

Le libre parcours ϖ' ainsi déterminé est sensiblement de l'ordre du parcours moyen ϖ_m; car si, pour produire l'électroluminescence, il suffit qu'une faible proportion d'électrons soit capable d'exciter les centres $\left(e^{-10} \approx \frac{1}{20\,000}\ \text{si}\ \varpi = 10.\varpi_m\right)$, à cause du grand nombre de centres existant et parce qu'il y a autant d'excitations que de demi-alternances, pour produire l'effet Gudden-Pohl (vidage brusque des pièges, la plupart étant vidés dès les premières alternances [11]), il faut pratiquement que tous les électrons accélérés aient acquis une énergie égale à la profondeur des pièges à vider.

On peut expliquer par là [12] ce fait, en apparence surprenant : tandis que les profondeurs des pièges sont de l'ordre de 0,5 eV et celles des centres de 2,5 eV, il suffit de champs à peine plus forts, et non cinq fois plus forts, pour obtenir un bel effet Destriau que pour provoquer l'effet Gudden-Pohl;

certaines cellules Destriau sont en effet déjà très lumineuses sous secteur, c'est-à-dire avec des champs de 10 000 V/cm.

Notons enfin que les CaS(Bi), mal cristallisés, ne présentent pas plus l'effet Gudden-Pohl, malgré la présence de pièges, que l'effet Destriau; cela conduit comme pour les centres à rejeter l'hypothèse d'une action directe du champ sur les pièges. De plus, en cette hypothèse le parcours ϖ' donnerait l'ordre de grandeur des dimensions des pièges; or, ces dimensions semblent de l'ordre de 10^{-7} cm [13].

3. **Influence de la polarisation**. — Le champ interne $\vec{E}$, qui provoque l'accélération des électrons et par là l'émission lumineuse, est toujours plus ou moins différent du champ appliqué $\vec{E}_0$. On a

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_a, \tag{6}$$

$\vec{E}_a$ étant le champ antagoniste dû aux charges électriques spatiales.

C'est E qui figure dans les formules (3) et (5), tandis que c'est E_0 (en réalité la tension appliquée V_0) qui est porté sur les graphiques (*fig.* 1).

Destriau a montré [3] :

— Qu'en appliquant à la cellule une tension constante, on observe seulement un éclair lumineux;

— En tension alternative, la luminescence persiste indéfiniment, avec des variations de brillance de même fréquence que le champ (« *ondes de brillance* »). Aux basses fréquences (quelques centaines de périodes par seconde au maximum), qui sont celles où interviennent les effets de polarisation, ces ondes sont systématiquement plus ou moins décalées *en avant* par rapport à la tension. Leur forme, souvent complexe, sera discutée dans l'article II.

Je résumerai ici brièvement le calcul effectué par Destriau [14] pour évaluer ces effets : Le champ antagoniste $\vec{E}_a$ est donné par l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \vec{E}_a = -\frac{4\pi\delta}{K},$$

K, constante diélectrique du milieu; δ, densité des charges. δ s'élimine en fonction de $\vec{E}$ au moyen de l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0,$$

où

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

(ρ résistivité). Il vient alors d'après (6) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right) + \frac{4\pi}{K\rho} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div} \vec{E}_0\right) \quad \text{(unités u.é.s.)}. \tag{7}$$

D'après cette relation :

Si $\vec{E}_0$ est constant, le champ interne décroît exponentiellement avec la constante de temps :

$$\theta = \frac{K\rho}{4\pi}. \tag{8}$$

Si $\vec{E}_0$ est sinusoïdal de pulsation ω, $\vec{E}$ est également sinusoïdal de même pulsation; leurs valeurs maxima E et E_0 sont liées par

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi}{K\rho\omega}\right)^2}}, \tag{9}$$

celle de E est décalée en avant par rapport à celle de E_0 d'un angle φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi}{K\rho\omega}. \tag{10}$$

Notons dès maintenant que ce calcul ne saurait être qu'approximatif, puisque δ, d'où ρ, ne sont pas les mêmes en tous les points de la substance et de plus varient pendant la durée de l'onde de brillance. Mais on voit déjà qu'il rend compte qualitativement des effets signalés au début de ce paragraphe.

La simple substitution des valeurs de K et ρ dans (9) ne permet guère de préciser l'ordre de grandeur des effets de polarisation. La formule (9) montre, K étant supposé de l'ordre de 10, que pour le 50 p la polarisation est négligeable (E très voisin de E_0) pour $\rho > 10^{10}\,\omega \times$ cm, tandis que pour $\rho < 10^9\,\omega \times$ cm, E serait seulement une faible fraction de E_0.

ρ et K variant avec la brillance de la substance, il convient naturellement d'utiliser des déterminations faites dans les conditions de fonctionnement de la cellule, et même alors le résultat est imprécis.

Ainsi Waymouth et al. [8] indiquent d'après l'étude du facteur de puissance la capacité et la résistance d'une cellule à ZnS(Cu) :

$$C \approx 0{,}01\ \mu\text{F}, \qquad R \approx 10^5\,\omega$$

sous 800 V. D'après ces résultats,

$$K \approx 10, \qquad \rho \approx 10^9\,\omega \times \text{cm}$$

et l'on aurait $E = \frac{E_0}{3}$. Mais aussi précises que soient les mesures de R et C de la cellule, à cause de la résistance des électrodes et du diélectrique dans lequel est noyé le sulfure, les valeurs de K et ρ du sulfure resteraient imprécises. Or si par exemple K et ρ varient tous deux d'un facteur 2, le facteur 3 est changé, soit en 1,8, soit en 9, ce qui ne permet pas d'être fixé sur l'importance de la polarisation. D'après ce qui suit, $\frac{E_0}{E}$ paraît devoir être en réalité inférieur à 3.

Le meilleur renseignement est tiré du décalage

en avant φ du maximum des ondes de brillance; comparant (9) et (10), on a, en effet :

$$E = E_0 \cos\varphi. \tag{11}$$

Ces décalages sont parfois presque nuls, parfois ils atteignent ou dépassent $\frac{\pi}{4}$ (Payne [15]). Un ordre de grandeur fréquent, à 50 ou 60 p, est $\varphi = \frac{\pi}{6}$. En ce cas, l'on aurait

$$E \approx 0{,}87 E_0.$$

Donc dans les sulfures électroluminescents usuels, à ces fréquences, E est compris entre 70 et 100 pour 100 de E_0.

Par suite, dans les calculs d'ordre de grandeur destinés à décider s'il est admissible de poser une hypothèse déterminée sur le mécanisme du phénomène d'électroluminescence, on pourra parfois négliger les effets de polarisation, assimilant E à E_0.

Ces résultats sont en accord avec la durée de l'éclair obtenu sous tension constante, donnée par (8), que les mesures montrent de l'ordre des centièmes de seconde. Il est d'ailleurs clair que si la durée de l'éclair est t, la polarisation est insignifiante aux fréquences $\gg \frac{1}{t}$, soit ici de quelques centaines. C'est bien ce que donne (*voir* article II) l'étude de l'effet de fréquence sur la brillance.

Notons que par suite de la variation de K et ρ avec B, le décalage du maximum de brillance par rapport au maximum de tension est plus fort que le décalage du minimum de brillance par rapport au zéro de tension (les ondes de brillance ne sont pas sinusoïdales). Ce sont évidemment les valeurs relatives au maximum de brillance qui sont intéressantes pour l'expression (5) de celle-ci et sont portées dans (11).

Il faudrait donc diviser par $\cos\varphi$ les libres parcours calculés par l'application pure et simple de (4) aux graphiques de la figure 1. Mais cette correction serait plutôt inférieure à l'erreur commise en ignorant la forme exacte du facteur $f(E)$ dans (5).

4. **Le choc des électrons accélérés sur les centres.** — Revenant au processus d'excitation des centres luminogènes (1), nous allons le décomposer en ses diverses phases, puis étudier séparément chacune de celles-ci.

La figure 2 représente schématiquement les trois phases de l'excitation d'un centre par un électron rapide de conductibilité.

(I) représente un électron en cours d'accélération dans la bande B. Cet électron s'élève dans la bande à mesure qu'il se déplace dans la direction du champ.

L'énergie cinétique de l'électron, immédiatement avant le choc, doit donc être au moins égale à la profondeur $h\nu$ du centre. Pour Cu dans ZnS, cette profondeur est 2,5 eV.

Lors de la découverte de l'effet Destriau (1936), on se posait encore la question de la largeur de la bande de conductibilité. L'existence de l'effet montrait que cette largeur était au moins $h\nu$.

Depuis, on s'est rendu compte qu'au delà du bas de la bande de conductibilité, les diverses bandes se recouvrent, formant un spectre continu d'énergies permises s'étendant indéfiniment [16]. *L'effet Destriau*

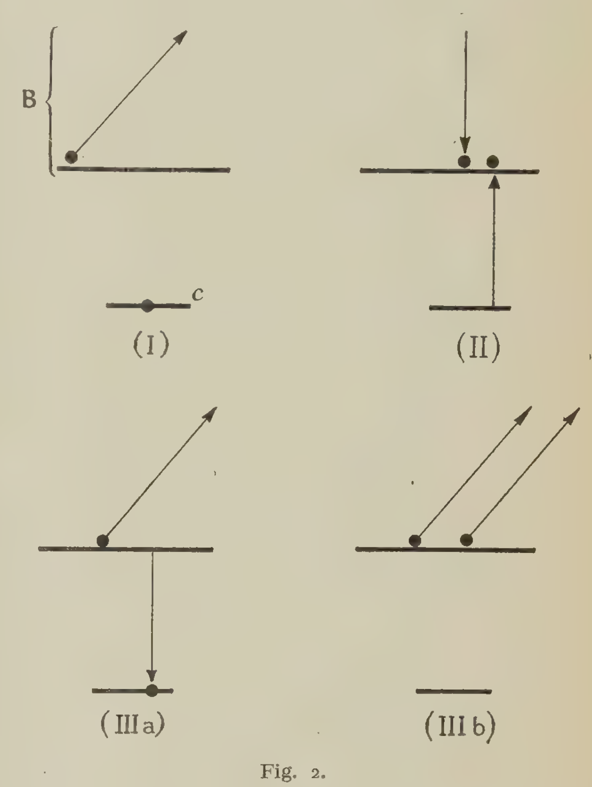


Fig. 2.

B, bande de conductibilité; c, centre luminogène. (I), avant le choc; (II), effet du choc; (III a) et (III b), les deux possibilités s'offrant après le choc (*voir* texte).

est donc energétiquement possible quelle que soit la profondeur du centre.

(II) décrit le cristal immédiatement après le choc sur le centre : l'électron accéléré a perdu son énergie tandis que l'électron primitivement fixé dans le centre est amené dans la bande de conductibilité.

(III) : après le choc se présentent deux possibilités. Dans le cas (III a), l'un des deux électrons repart dans la bande et est destiné, soit à s'y déplacer aux vitesses thermiques, soit à s'accélérer à nouveau. Le second électron retombe dans le centre, ce qui s'accompagne en général d'une émission de lumière ayant eu lieu immédiatement après l'excitation (c'est-à-dire 10^{-8} s après, vie moyenne des émissions atomiques). Vu l'indiscernabilité des électrons, cela n'a aucun sens de distinguer si c'est l'électron initialement accéléré qui repart ou celui provenant du centre.

L'autre éventualité possible est le cas (III *b*) : les deux électrons s'éloignent dans la bande de conductibilité et pourront s'accélérer éventuellement. *L'électron issu du centre est « soufflé » par le champ loin de celui-ci* (3).

L'émission de lumière est alors retardée par rapport au cas précédent. Elle aura lieu au bout d'un temps comparable aux durées de fluorescence. Dans les sulfures, ces durées sont normalement de 10^{-5} s; mais l'étude de l'effet de fréquence nous conduira à des durées parfois de plus de 10^{-4} s, interprétables en admettant que le champ amasse les électrons vers l'anode, retardant ainsi leur rentrée dans la région restante des grains (la présence du champ augmenterait les durées de fluorescence lors de l'électroluminescence).

Malgré ce retard, avec la fréquence secteur, la rentrée dans tous les centres a lieu avant la fin de la demi-alternance en cours. Il n'en sera plus de même aux fréquences de quelques kilocycles.

Il nous semble que l'éventualité (*b*) — soufflage des électrons loin des centres — serait de beaucoup la plus probable.

En effet, supposons que l'électron quitte le centre avec une vitesse de l'ordre des vitesses thermiques $\sqrt{\frac{kT}{m}}$, soit 10^7 cm/s. Le diamètre des centres étant inférieur à 10^{-6} cm, l'électron mettrait donc 10^{-13} s à quitter le centre. Comparant ce temps à la durée 10^{-8} s des émissions atomiques, on aurait pour la probabilité de rentrée immédiate (*a*) la valeur 10^{-5}.

En réalité, ce nombre ne doit pas être si faible, le raisonnement ci-dessus supposant rectiligne la trajectoire de l'électron, tandis qu'en réalité les diffusions thermiques peuvent ramener l'électron sur le centre. Nous allons voir que malgré ces diffusions une très forte proportion des électrons *excités par choc d'un électron accéléré par le champ* doit s'éloigner définitivement du centre initial.

Remarques sur la diffusion des électrons dans la bande de conductibilité. — Nous utiliserons la relation, valable pour n grand :

$$x = l\sqrt{\frac{n}{3}} \tag{12}$$

qui donne la somme x de n vecteurs de longueur l dans des directions réparties au hasard. Cette relation est utilisée dans l'étude de la diffusion des neutrons [17].

Considérons d'abord un électron *issu d'un piège*, lors du déclin normal de la phosphorescence en l'absence de champ. Si ce piège est lié à un centre, l'expérience montre qu'il tombe généralement dans ce centre (mécanisme « monomoléculaire » [10]. Cependant il quitte le piège avec une énergie de l'ordre de kT, donc une vitesse de 10^6 à 10^7 cm/s. Si sa trajectoire était rectiligne, il aurait donc une probabilité de 10^{-4} à 10^{-5} d'être capté par ce centre.

Mais pour traverser le centre il lui faut subir d'après (12) plus de 100 diffusions (dimensions du centre et des pièges et déformations qui l'entourent : près de 10^{-6} cm, soit 10 parcours l de diffusion thermique), ce qui déjà augmente la probabilité de capture. De plus, pour parvenir à un autre centre vide, que nous supposerons situé à environ 10^{-5} cm, vu la faible proportion des centres excités lors du déclin de la phosphorescence de longue durée, il doit subir, toujours d'après (12), $n = 30\,000$ diffusions, donc parcourir en réalité 3.10^{-3} cm. Dans ce trajet, il a toutes chances d'être arrêté par un défaut quelconque du réseau, principalement par les déformations au voisinage du système centre + piège initial, qui n'arrêteraient pas un électron plus rapide, et renvoyé sur celui-ci.

Si le piège dont sort l'électron n'est pas lié à un centre vide, l'électron sera le plus probablement capté par le premier centre vide rencontré.

Considérons maintenant un électron *issu d'un centre sous excitation ultraviolette* (ou par cathodo- ou β-excitation), en l'absence de champ. Cet électron quitte le centre en général avec un excès d'énergie cinétique et n'est pas arrêté par les déformations au voisinage du centre, qui arrêtaient ci-dessus l'électron du bas de la bande de conductibilité. Il peut donc s'éloigner plus que ce dernier de son point de départ : dans ce cas, le mécanisme sera « bimoléculaire ». Il perdra néanmoins rapidement son énergie initiale par suite des diffusions thermiques (une dizaine de diffusions suffisent pour cela, c'est-à-dire un parcours de quelques 10^{-7} cm) et l'éventualité la plus probable reste la retombée dans le centre initial.

Considérons toujours un électron issu d'un centre sous excitation ultraviolette, mais en présence de champ. Les diffusions thermiques s'effectuent autour d'une position moyenne emportée par le champ avec une vitesse μE d'environ 10^6 cm/s. Alors la proportion d'électrons emportés loin des centres croît; c'est l'*effet Dechêne* [18] : on observe une baisse de brillance de l'ordre du 1/10e en soumettant le sulfure irradié à une tension. La proportion d'un dixième correspond aux électrons captés dans un piège situé sur la ligne de courant du centre de départ; la proportion des électrons qui ont quitté le centre initial est plus forte, à cause de ceux qui sont tombés avec émission dans un centre quelconque.

Enfin, un électron amené dans la bande de conductibilité par choc sur le centre d'un autre électron

(3) C'est par ce « soufflage » que l'excitation par électrons accélérés par le champ en électroluminescence diffère de l'excitation par rayons cathodiques ou β. Le retard à l'émission lumineuse en résultant favorise les rentrées sans émission.

accéléré par le champ possède une *quantité de mouvement initiale dirigée suivant le champ.* Il n'a pas une énergie initiale plus grande que celui excité par ultraviolet, mais il quitte le centre avant que cette énergie soit dissipée. Si l'on se reporte au processus d'accélération décrit paragraphe 5, on verra que souvent même son énergie s'accroîtra, car il se trouve dans les conditions d'un électron qui a déjà commencé à subir le processus d'accélération. Donc la probabilité de capture est ici voisine de celle calculée dans le cas d'une trajectoire rectiligne au-dessus du centre.

Choc électron sur piège dans l'effet Gudden-Pohl. — Les figures 2 peuvent aussi bien s'appliquer à l'ionisation d'un niveau localisé quelconque du réseau, l'électron issu de ce niveau s'éloignant dans la bande.

En particulier, le vidage d'un piège plein par un électron accéléré peut être décrit par ces figures, en faisant jouer au piège plein le même rôle qu'au centre non excité. L'énergie d'accélération nécessitée sera simplement moins grande, d'où l'utilisation de champs généralement moins élevés (*voir*, toutefois, § 2). A chaque piège plein correspond un centre resté vide depuis la photoexcitation antérieure, on aura donc émission lumineuse même si le champ est insuffisant pour exciter de nouveaux centres.

On voit que dans cette théorie d'accélération des électrons par le champ, l'électrophotoluminescence se ramène à l'électroluminescence, en devenant en quelque sorte un cas particulier. Naturellement l'effet cesse dès que les pièges ont été vidés.

C'est là un des principaux avantages de cette théorie sur les autres théories qui ont été envisagées pour l'électroluminescence, ces dernières (*voir* Appendice, article II) ne fournissant pas l'explication de l'effet Gudden-Pohl.

5. Le processus d'accélération des électrons par le champ. — Il convient maintenant de rechercher si des champs de 10^4 V/cm ou quelques 10^4 V/cm (champs qui provoquent l'effet Gudden-Pohl et l'effet Destriau) sont effectivement capables d'accélérer les électrons suivant le mécanisme proposé.

J'ai fait remarquer dans un article précédent [12] que la condition d'accélération continue des électrons par le champ n'est autre, qualitativement, que la *condition de rupture des diélectriques* admise depuis les travaux de von Hippel ([19]; on trouvera d'autres références dans [12]).

Néanmoins il est clair qu'il n'y a pas rupture lors de l'effet Destriau. Les champs de rupture sont en fait quelques dizaines de fois plus élevés que ceux provoquant l'électroluminescence (4).

(4) On ne semble pas avoir mesuré les champs de rupture pour ZnS. G. Destriau a pu faire supporter 700 000 V/cm à certaines cellules, le champ de rupture serait donc égal *ou supérieur* à cette valeur.

La rupture a lieu lorsque l'état d'accélération continuelle est un état stable pour les électrons; tandis que pour obtenir l'électroluminescence il est seulement nécessaire d'accélérer une fraction relativement faible des électrons de conductibilité, le reste d'entre eux demeurant d'énergies thermiques; de plus, l'accélération s'interrompt au bout du parcours ϖ_m (notation du paragraphe 2), c'est-à-dire avant qu'il y ait possibilité d'ionisation de la bande de valence. C'est pour ces raisons que l'accélération n'entraîne alors pas rupture.

Mais le processus d'accélération postulé est le même : dans les deux cas on admet que l'électron libre dans le réseau s'accélère lorsque *le champ électrique est assez intense pour qu'il gagne plus d'énergie par l'effet du champ qu'il n'en perd par suite des diffusions thermiques.*

Dans l'article [12], le point de vue pris avait été celui de la comparaison entre rupture diélectrique et électroluminescence. Je résumerai rapidement les principaux résultats, en considérant seulement ici les applications à l'électroluminescence.

Seeger et Teller (*voir* par exemple Seitz [20]) ont étudié l'accélération des électrons lents. Soit l le libre parcours entre deux diffusions thermiques. A chaque diffusion l'électron échange un quantum $h\nu$ avec les vibrations thermiques du réseau. Seeger et Teller posent comme condition d'accélération par le champ E :

$$eEl > h\nu. \tag{13}$$

Ils négligent la probabilité de gain d'énergie par diffusion. En réalité, lors de l'équilibre thermique, l'échange $h\nu$ est une perte d'énergie avec la probabilité d'émission

$$\mathrm{E} :: 1 - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

et un gain avec la probabilité d'absorption

$$\mathrm{A} :: \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

il faut remplacer dans (13) $h\nu$ par la perte d'énergie moyenne à chaque diffusion :

$$h\nu \frac{\mathrm{E} - \mathrm{A}}{\mathrm{E} + \mathrm{A}},$$

d'où

$$eEl > h\nu \left[1 + \frac{2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right]^{-1}. \tag{14}$$

Cette correction, faite dans la théorie de Fröhlich et Mott, n'est pas négligeable; pour $h\nu \approx kT$, elle abaisse les champs trouvés d'un facteur 2 environ.

Actuellement on ne peut donner mieux qu'un ordre de grandeur. Je n'ai pu trouver dans la littérature la valeur de la fréquence de Debye du ZnS.

Pour le libre parcours l des électrons thermiques, on a, d'après Seitz [20] :

$$l \approx 10^{-7} \text{ cm}$$

résultant de mesures d'effet Hall. Faisant arbitrairement $h\nu = kT$, ce qui donne un ordre de grandeur à un facteur 2 près, (14) conduit alors à

$$E > 100\,000 \text{ V/cm}.$$

D'après Seeger et Teller, la valeur limite ainsi trouvée devrait être le champ de rupture, qui est en réalité plus élevé.

Il faut observer que (14) est une *condition nécessaire d'accélération* des électrons, mais non suffisante. Pour qu'elle soit suffisante, il faudrait remplacer l par sa projection dans la direction du champ, qui est en moyenne presque nulle pour des électrons thermiques : c'est pour cette raison qu'elle fournit des « champs de rupture » trop faibles.

Si (14) est vérifiée, l'électron gagne en moyenne de l'énergie en fin du parcours l si ses parcours s'effectuent dans la direction du champ; si ses parcours sont isotropes, il ne s'accélère que pour des champs très supérieurs à la limite trouvée. Mais si (14) n'est pas vérifiée, l'électron ne s'accélère pas, sauf hasard dû aux fluctuations de diffusion.

Dans le ZnS, aux champs de quelques 10^4 V/cm employés en électroluminescence, (14) n'est pas vérifiée pour les électrons thermiques ($l \approx 10^{-7}$ cm); mais, le libre parcours croissant avec l'énergie à peu près proportionnellement à celle-ci, elle l'est pour des électrons qui, par suite des fluctuations de diffusion, sont parvenus aux énergies de l'ordre de 1/10 eV ($l \approx 10^{-6}$ cm).

Ainsi, *aux champs de quelques* 10^4 V/cm *employés en électroluminescence*, la majorité des électrons resteront lents, c'est-à-dire d'énergies thermiques, et subissant un mouvement brownien de libre parcours l. Il se superpose à ce mouvement un déplacement d'ensemble avec la vitesse μE (μ mobilité) dans la direction du champ. (Aux champs de quelques milliers de volts par centimètre seulement, usuellement employés dans les expériences de conductibilité, tous les électrons seraient dans ce cas.)

Mais ici, quelques électrons, d'abord diffusés eux aussi avec des énergies thermiques, acquièrent une énergie $\gg kT$, par exemple parce qu'ils ont eu une ou plusieurs fois un parcours sensiblement supérieur au libre parcours moyen, situé dans la direction du champ, ou encore gagné de l'énergie à plusieurs diffusions successives. Ils arrivent ainsi dans la zone d'énergie où la condition d'accélération (14) est vérifiée.

Si à ce moment leur parcours est sensiblement dans la direction du champ, ils vont en général s'accélérer continûment. En effet, un électron énergique ne subit pratiquement plus que des diffusions sous angles faibles : donc leur parcours restera dans la direction du champ; et, *pour ces électrons déjà accélérés par le champ*, (14) constitue une condition suffisante d'accélération.

La figure 3 représente la trajectoire d'un électron s'accélérant. Elle a une allure très différente dans le domaine des énergies thermiques (*mouvement brownien à court parcours l*) et dans le domaine où il a pris de l'énergie (*déplacement sensiblement rectiligne dans la direction du champ*).

Cette trajectoire s'interrompt brusquement au bout d'un parcours x. Si ce parcours a été suffisamment long, il peut y avoir excitation d'un centre ou vidage d'un piège. L'électron a alors perdu son énergie. Mais s'il lui subsiste après le choc une certaine quantité de mouvement dans la direction du champ (s'il avait un excès d'énergie), il pourra s'accélérer à nouveau avec une probabilité plus grande que la probabilité d'accélération d'un électron lent quelconque. Il pourra en être de même de l'électron qu'il a libéré du centre ou piège. Ce fait facilite la formation des « chaînes d'électrons » considérées ci-dessous.

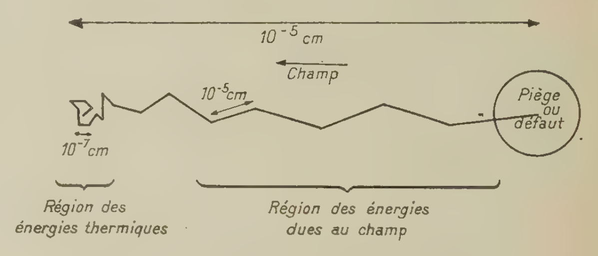


Fig. 3. — Trajectoire d'un électron accéléré par le champ dans la bande de conductibilité.

Erratum : Au milieu de la trajectoire, *lire* 10^{-6}, *au lieu de* 10^{-5}.

L'énergie acquise le long du parcours x, malgré la forme compliquée de la trajectoire, reste sensiblement eEx comme admis dans le calcul élémentaire du paragraphe 2. Ce calcul considérait les projections des parcours dans la direction du champ pour l'établissement de la loi (3); or les parcours des électrons en cours d'accélération se confondent sensiblement avec leur projection, justifiant ainsi cette loi quoiqu'il n'en soit pas de même pour la majorité des électrons de conductibilité.

On remarquera que si le champ ne modifiait pas l'allure des trajectoires, c'est-à-dire si

$$\mu E \ll \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

on aurait $\varpi_m \approx 0$ et la relation (3) n'aurait eu aucun sens.

La probabilité d'accélération d'un électron rentre dans le facteur $f(E)$ considéré dans la formule complète (5). Ce facteur croît avec le champ. De fait, la raison profonde pour laquelle cette probabilité

est notable est que les champs sont assez élevés pour que

$$\mu E \sim \sqrt{\frac{kT}{m}}. \tag{15}$$

La vitesse μE due au champ pour un électron non encore accéléré est de l'ordre de 10^6 cm/s pour des champs de quelques 10 V/cm, cessant d'être négligeable devant les vitesses thermiques $\sqrt{\frac{kT}{m}} \approx 10^7$ cm/s. C'est pourquoi l'accélération n'est pas encore la règle, mais ne nécessite pas un concours de circonstances extraordinaires.

D'après les expériences, il ne semble pas que $f(E)$ croisse très rapidement avec le champ. La discussion ci-dessus ne permet guère d'évaluer $f(E)$, mais il semble en résulter que l'arrivée d'un électron dans la zone d'énergie où l'accélération a lieu (zone où les diffusions se font sous angles faibles) dépend surtout des fluctuations de ses parcours thermiques, et moins du champ. La rapidité du gain d'énergie une fois l'état d'accélération établi figure dans $\exp\left(-\frac{b}{E}\right)$ et non dans $f(E)$. Notons que si la condition (14) était vérifiée dès les énergies thermiques (champs plus voisins de la rupture), la proportion d'électrons s'accélérant serait celle des électrons de parcours thermiques situés dans un cône d'ouverture croissant avec le champ, et en ce cas varierait, au contraire, très vite avec le champ.

Remarque. — (15) nous suggère une forme approchée, semble-t-il non encore donnée, de la condition de rupture, qui serait

$$\mu E \gg \sqrt{\frac{kT}{m}}. \tag{16}$$

Il s'agit de μ pour les électrons thermiques :

$$\mu = \frac{el}{mv}.$$

Cette condition s'écrit aussi :

$$eEl \gg mv^2$$

ou encore puisqu'il s'agit des électrons thermiques :

$$eEl \gg kT. \tag{17}$$

Mais il faut que μE soit réellement bien plus grand que $\sqrt{\frac{kT}{m}}$ pour que l'état d'accélération devienne la règle générale. Il ne semble donc pas que l'on puisse par là calculer exactement les champs de rupture; cette condition n'en fournit qu'une limite inférieure, comme la condition de Seeger et Teller. Pour qu'il y ait rupture, il faut de plus que l'ionisation de la bande de valence soit énergétiquement possible au bout du parcours ϖ_m.

6. **Interprétation du parcours moyen ϖ_m.** — Le parcours moyen ϖ_m apparaît comme *le parcours d'un électron accéléré avant perte d'énergie.*

Dans la littérature, on considère généralement deux espèces de parcours :

— Le parcours avant diffusion thermique ou par impureté l;

— Le parcours λ avant capture de l'électron par un piège, auquel correspond la saturation du courant photoélectrique primaire.

ϖ_m ne peut être identifié à l puisqu'il se termine par une perte d'énergie beaucoup plus grande — plusieurs dixièmes d'électron-volt —, ni à λ qui est de l'ordre des centimètres.

Il faut donc considérer une troisième espèce de parcours, qui n'intéresse d'ailleurs que les électrons s'accélérant.

La formule de Destriau [3] repose sur la différence entre ϖ_m et le parcours ϖ nécessaire pour que l'électron excite le centre; cette différence implique que la perte d'énergie est due en général à d'autres causes que cette excitation.

Nous considerons ϖ_m comme le parcours avant choc sur un défaut du cristal, ce choc entraînant une perte d'énergie au moins partielle pour l'électron. Même si ce choc a lieu aussi bien pour un électron thermique que pour un électron accéléré, il n'a d'importance que pour l'électron accéléré, l'électron thermique perdant beaucoup plus fréquemment son énergie par suite des diffusions thermiques que par suite d'un tel choc. Mais peut-être y a-t-il de plus, dans certains cas, une sorte d'effet Ramsauer, l'électron thermique, de longueur d'onde de de Broglie 80 Å, traversant des déformations de quelques dizaines d'angströms, tandis que l'électron d'un électron-volt, de longueur d'onde 10 Å environ, serait arrêté.

Parmi ces défauts interviennent évidemment les centres ou les pièges eux-mêmes : l'électron peut perdre son énergie sur un piège vide, ou sur un centre sans en chasser l'électron dans la bande de conductibilité. L'énergie peut ensuite rester dans le centre, qui est alors excité sans départ d'électron (5), ou être communiquée aux vibrations thermiques du réseau. Si ces défauts contiennent un électron, cas

(5) Le mot « excitation » présente dans le cas des centres luminogènes une certaine ambiguïté. Dans le cas des atomes, l' « excitation » signifie que l'énergie est fournie à l'atome sans départ d'électron du cortège, l' « ionisation » qu'il y a départ d'électron.

Lorsque l'on « excite » la luminescence, on dit tout naturellement que l'on « excite » les centres. Mais dans ZnS, au sens pris pour les atomes, on ne les « excite » pas, on les « ionise » en général.

Dans ce paragraphe, je préciserai dans chaque cas si l'électron est ou non chassé du centre. Dans mon article [12], j'avais employé indifféremment le terme de « section efficace d'excitation » des pièges ou centres et de « section efficace de perte d'énergie » sur les pièges et centres; je préfère le second.

des niveaux donneurs peu profonds que nous serons amenés à considérer, l'énergie peut également leur être communiquée avec ou sans départ de l'électron.

Le *choc sur électron de la bande de valence* est admissible, mais vraisemblablement peu important, car il n'est énergétiquement possible qu'après un parcours déjà très supérieur à ϖ_m et même supérieur au parcours ϖ avant possibilité d'ionisation des centres. En fait, il n'a pas lieu lors de l'effet Gudden-Pohl, puisqu'alors on ne vide pas les centres, *a fortiori* pas la bande de valence; et lors de l'effet Destriau, le nombre d'électrons arrachés à la bande de valence doit être faible loin de la rupture.

Enfin, une *diffusion thermique vers l'arrière*, toujours possible même aux énergies élevées, entraînerait le ralentissement immédiat de l'électron : cette diffusion elle-même n'entraînant qu'une perte d'énergie négligeable, mais le champ s'opposant au déplacement ultérieur de l'électron. Selon Bardeen [21], la probabilité de diffusion vers l'arrière serait de l'ordre de $1/10^e$ de celle de diffusion vers l'avant (*fig.* 4).

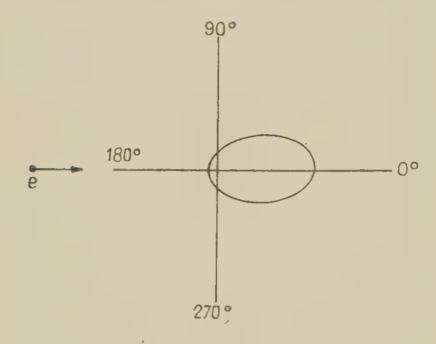


Fig. 4. — Distribution angulaire de diffusion thermique aux énergies élevées (Bardeen).

Il faut cependant noter que le calcul de Bardeen est applicable dans les métaux, c'est-à-dire aux énergies élevées dans des champs faibles; il est possible que dans un champ élevé la probabilité de diffusion vers l'arrière soit différente.

Mais l'interruption de l'accélération par suite d'une telle diffusion paraît un événement relativement rare une fois l'accélération amorcée, les diffusions elles-mêmes devenant de plus en plus espacées à mesure que l'accélération se poursuit : une fois l'électron parvenu à une énergie de l'ordre de 1 eV, le parcours entre diffusions thermiques s'est élevé à 10^{-5} cm. La diffusion vers l'arrière n'aurait alors lieu qu'au bout de plus de 10^{-4} cm.

De même une diffusion vers l'arrière par une impureté chargée suivant le modèle de Rutherford est un événement possible, mais rare. Le libre parcours d'un électron d'énergie E avant diffusion sous angle élevé par impureté est, selon la formule de Conwell-Weisskopf [22] :

$$l_i = \frac{a}{2}\left(\frac{2\,\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{Log}\left[1+\left(\frac{2\,\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right)^2\right]}, \tag{18}$$

a, distance des impuretés; $\mathrm{E}_1 = \frac{2e^2}{Ka}$. Si pour ZnS il y a 10^{18} impuretés par centimètre cube :

$$a = 10^{-6}\ \text{cm},$$

$$\mathrm{E}_1 \approx 0{,}04\ \text{eV} \qquad (K \approx 8).$$

pour $\mathrm{E} \approx 1$ eV, il vient par (18) :

$$l_i \approx 1{,}6 . 10^{-4}\ \text{cm}.$$

En résumé, l'arrêt d'un électron peut être dû à de multiples causes, mais il s'effectuerait principalement par ralentissement sur une déformation du réseau (centre, piège ou défaut).

Rappelons maintenant quelques généralités sur les parcours. La distribution exponentielle

$$N(x) = N e^{-\frac{x}{\varpi_m}}, \tag{19}$$

$N(x)$, nombre d'électrons de parcours au moins égal à x;
N, nombre total d'électrons;
ϖ_m, parcours moyen;

suppose que la probabilité que le parcours se termine entre x et $x + \mathrm{d}x$ est

$$p\,\mathrm{d}x \qquad \left(p = \text{const.} = \frac{1}{\varpi_m}\right)$$

indépendante du parcours déjà effectué.

Si l'arrêt des électrons s'effectue avec une section efficace σ sur des défauts de densité δ, on a

$$p = \sigma\delta. \tag{20}$$

S'il y a plusieurs défauts capables d'arrêter les électrons, les produits $\sigma\delta$ correspondant aux différents défauts s'ajoutent.

La possibilité d'ionisation des centres une fois atteint le parcours ϖ défini par

$$h\nu = eE\varpi \tag{2}$$

perturbe la distribution (19) au delà du parcours ϖ.

Désignons par p (indépendante de x) la probabilité d'arrêt de l'électron par unité de longueur pour toute autre cause que l'ionisation des centres, et par p_i la probabilité d'ionisation des centres :

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < \varpi, \\ p_i & \text{pour} \quad x > \varpi. \end{cases}$$

Pour simplifier, nous supposerons $p_i = \text{const.}$, c'est-à-dire la section efficace d'ionisation des centres

indépendante de l'énergie pourvu que celle-ci soit supérieure à $h\nu$. Cette approximation ne modifie pas la conclusion que nous avons à utiliser pour l'électroluminescence.

La distribution des parcours x est alors donnée par

$$\left.\begin{array}{ll} N(x) = N\,\mathrm{e}^{-px} & \text{pour} \quad x \leq \varpi, \\ N(x) = N\,\mathrm{e}^{-p\varpi}\,\mathrm{e}^{-(p+p_i)(x-\varpi)} & \text{pour} \quad x \geq \varpi, \end{array}\right\} \quad (21)$$

N, nombre total d'électrons accélérés.

En particulier :

$$N(\varpi) = N\,\mathrm{e}^{-\frac{\varpi}{\varpi_m}} \qquad \left(\varpi_m = \frac{1}{p}\right) \qquad (22)$$

la perturbation n'a pas lieu au-dessous du parcours ϖ.

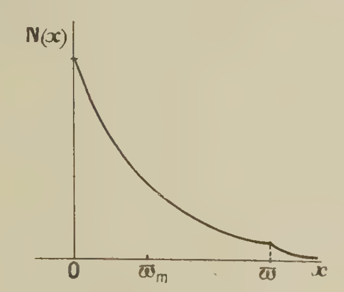


Fig. 5. — Distribution des parcours.

Ainsi *le parcours moyen réel des électrons*

$$\frac{1}{N}\int_0^\infty N(x)\,\mathrm{d}x$$

est abaissé au-dessous de ϖ_m *à cause de la possibilité d'ionisation des centres. Mais* (3) *reste valable, avec un* ϖ_m qui est le parcours moyen qu'auraient les électrons si cette ionisation n'avait pas lieu, et est donné par

$$\frac{1}{\varpi_m} = \sum \sigma\delta, \qquad (23)$$

somme sur toutes les causes de pertes d'énergie intervenant, sauf l'ionisation des centres.

Pour le calcul du gain d'énergie (2), l'origine des parcours doit évidemment être prise au début de l'accélération, et cela est permis puisque le parcours ϖ_m restant à effectuer est indépendant du parcours déjà franchi avant que l'accélération ait commencé.

Sections efficaces d'arrêt sur un défaut du réseau. — La relation (23), où ϖ_m résulte de l'expérience par (4), permet de donner l'ordre de grandeur des sections efficaces y intervenant. On a

$$\frac{1}{\varpi_m} = \sigma_c\delta_c + \sigma_p\delta_p + \sigma_d\delta_d + \ldots, \qquad (24)$$

σ_c, σ_p, σ_d, sections efficaces de perte d'énergie sur les centres, les pièges, les donneurs; δ_c, δ_p, δ_d leurs densités respectives. Il s'agit pour les centres de la perte d'énergie sur la déformation constituée par le centre, sans ionisation de celui-ci, et pour les pièges de la perte d'énergie sur le piège vide.

D'autres causes de perte d'énergie peuvent intervenir : probabilité de diffusion vers l'arrière (surtout sensible aux faibles énergies), ionisation des donneurs (intervient au delà de quelques ϖ_m si ces niveaux ont une profondeur de 1 eV environ, comme nous serons amenés à le supposer). La probabilité de ces effets variant avec l'énergie semble être relativement faible; sinon d'ailleurs ϖ_m ne serait pas une constante déterminée et l'on n'aurait pas (22). Il ne s'ensuit pas qu'elle soit négligeable : si, par exemple, l'ionisation des donneurs se produit au delà de $3\varpi_m$, sa probabilité p sera au plus égale à

$$p \approx e^{-3} \approx \frac{1}{20},$$

valeur suffisamment faible pour ne pas changer ϖ_m, et cependant (*voir* § 7) suffisante pour permettre le développement des chaînes d'électrons.

De ϖ_m on ne peut déduire la section efficace d'ionisation des centres, c'est-à-dire le parcours restant au delà de ϖ. Cette σ n'est, en effet, pas contenue dans (24).

Admettons que les diverses σ dans (24) sont du même ordre de grandeur (à un facteur 10 près). La densité des centres est connue par le nombre d'atomes luminogènes introduits, celle des pièges par la somme de lumière de phosphorescence. Dans un ZnS usuel [12] :

$$\delta_c \approx 10^{18}/\mathrm{cm}^3, \qquad \delta_p \approx 10^{17}/\mathrm{cm}^3.$$

Pour la densité en niveaux donneurs, on n'a pas de renseignements directs; une valeur analogue paraît admissible, du moins dans les sulfures à belle électroluminescence, mais une valeur beaucoup plus faible est également possible (§ 8). Le terme $\sigma_d\,\delta_d$ n'est vraisemblablement pas prépondérant.

Dans ces conditions, pour

$$\varpi_m \approx 10^{-5}\ \mathrm{cm},$$

on aurait

$$\sigma_c \approx \sigma_p \approx \sigma_d \approx 10^{-12} \quad \text{ou} \quad 10^{-13}\ \mathrm{cm}^2.$$

Il semble d'ailleurs que les pièges causent une gêne sérieuse à l'accélération des électrons, les sulfures persistants étant généralement peu sensibles; on est donc conduit à leur attribuer une section efficace quelque peu supérieure à celle des centres, pour compenser leur densité plus faible :

$$\sigma_p \approx 10^{-12}\ \mathrm{cm}^2.$$

Ces sections efficaces sont 10^5 ou 10^6 fois plus grandes que les sections efficaces *de capture* d'électrons par les pièges :

$$\sigma_{\mathrm{cap}} \approx 10^{-18}\ \mathrm{cm}^2$$

correspondant à des parcours avant capture de l'ordre du centimètre.

Selon la conception de Mott [23] de la capture par un piège, cette différence s'expliquerait comme suit : l'électron ne serait pas capturé « en vol »; mais il commencerait par perdre son énergie sur le piège avec la section efficace σ_p, puis repartirait ou serait capturé définitivement. Si P est la probabilité que l'électron arrêté soit définitivement capturé, l'on aurait

$$\sigma_{\mathrm{cap}} = \sigma_p P, \qquad (25)$$

d'où

$$P \approx 10^{-[illegible]} \quad \text{ou} \quad 10^{-6}.$$

J'ai montré dans [12] que la théorie donne effectivement ainsi l'ordre de grandeur correct 10^{-18} cm² des sections efficaces de capture, ce qui semble légitimer dans le cas présent l'emploi de la conception de Mott, proposée par ce dernier dans le cas des centres F.

On retrouve la valeur très élevée de la probabilité qu'un électron arrêté au-dessus d'un niveau localisé s'échappe au lieu d'être capturé par ce niveau. La conception de la capture de Mott fournit donc un appui aux développements du paragraphe 4 à ce sujet. Comme au paragraphe 4, P n'est la probabilité que l'électron s'échappe que s'il est soumis à un champ électrique empêchant les diffusions thermiques de le ramener sur le piège.

7. **Les « chaînes d'électrons ».** — L'ionisation d'un centre ou d'un niveau donneur par un électron accéléré amène dans la bande un second électron qui, comme on l'a vu au paragraphe 4, s'éloigne en général du centre ou niveau initial; il est susceptible également de s'accélérer et de provoquer l'ionisation d'autres niveaux.

D'où une *augmentation en chaîne* du nombre d'électrons libres. Si tout parcours ϖ_m s'achevait par l'ionisation d'un niveau, on aurait ainsi, au bout de n parcours, $f = 2^n$ électrons de conductibilité par électron initial, ce qui correspondrait à un facteur de multiplication considérable ($f = 2^{1000}$ pour la traversée d'une cellule de 0,1 mm d'épaisseur, dans le cas où les électrons passeraient librement de grain à grain).

En réalité, la divergence existe, mais est bien moins rapide.

Si ϖ_a est le parcours moyen d'un électron avant l'accélération, ϖ_m le parcours de l'électron s'accélérant et p la probabilité que ce parcours se termine par l'ionisation d'un niveau, le facteur de multiplication est

$$f = (1 + p)^n \qquad (26)$$

au bout d'un parcours

$$n(\varpi_a + \varpi_m).$$

Le rapport $\frac{\varpi_m}{\varpi_a}$ fournit une évaluation approchée de la proportion d'électrons accélérés.

Des expériences qui ont été faites au Laboratoire semblent appuyer cette conception. Ces expériences, sur lesquelles nous reviendrons dans l'article II, ont porté sur des substances électroluminescences placées dans un champ sans être au contact des électrodes : elles ne sont lumineuses qu'en épaisseur suffisante pour permettent le développement de chaînes à grand facteur de multiplication, l'alimentation directe de la bande de conductibilité étant très peu intense dans ce cas. Pour un échantillon de willémite (substance à seuil généralement élevé), placé dans un champ peu au-dessus du seuil, l'épaisseur minimum était de 1 mm environ.

Par ailleurs, ces chaînes paraissent permettre d'expliquer certains résultats obtenus par Kallmann et son école, lesquels observeraient [24], [25] lors d'expériences de photoconductibilité sur ZnS ou CdS des courants 10^3 à 10^6 fois plus élevés que le nombre d'électrons libérés par l'excitation ultraviolette. Ils utilisent des champs élevés, de plus de 10^4 V/cm; à des champs plus faibles [26], rien d'anormal ne semble apparaître.

Ces résultats suggèrent l'existence de chaînes, ayant pour têtes les électrons libérés par la photoexcitation, apparaissant lorsque l'on utilise les champs d'électroluminescence (il ne serait pas nécessaire d'ailleurs que le sulfure soit électroluminescent, il suffirait qu'il possède des niveaux, luminogènes ou non, ionisables par les électrons accélérés). En cette hypothèse, le facteur de multiplication f serait directement fourni par l'expérience; on aurait ainsi pour interpréter les expériences de Kallmann et Kramer [24]

$$f \approx 1\,000$$

pour une épaisseur de 0,1 mm.

Il convient de préciser que ces points demandent des études complémentaires; ils ne sauraient actuellement prouver à eux seuls l'existence des chaînes, mais cette existence est une conséquence nécessaire de l'hypothèse des niveaux donneurs dans le ZnS : ces niveaux devant nécessairement être ionisés par les électrons accélérés, de même que les pièges lorsqu'ils sont pleins.

Le tableau ci-dessous indique la valeur de ϖ_a qu'il convient d'admettre, d'après (26), suivant la valeur de p, pour obtenir le facteur de multiplication 1000 pour 0,1 mm d'épaisseur :

p	1	e^{-3}	e^{-10}
n	10	140	140 000
ϖ_a (cm)	10^{-3}	10^{-4}	$\varpi_a < 0$ (imp.)

La première colonne correspond au cas où tout parcours ϖ_m se terminerait par une ionisation (niveaux donneurs de profondeur 1/10e eV environ); la deuxième colonne au cas de niveaux donneurs de 1 eV environ; la troisième colonne au cas où il n'y aurait que les centres comme niveaux ioni-

sables $\left[p = \exp\left(-\frac{\varpi}{\varpi_m}\right)\right.$ donnée au paragraphe $\left.2\right]$: en ce cas, le développement des chaînes serait insignifiant et il est impossible d'obtenir $f = 1000$ pour l'épaisseur donnée.

Nous admettons (§ 6 et 8) le cas de la seconde colonne. On voit que les chaînes peuvent prendre un développement important, même si le parcours ϖ_m ne se termine par une ionisation que dans un cas sur 20 (e^{-3}) environ, avec une proportion d'électrons accélérés de 1/10e. Rappelons qu'il s'agit ici de la proportion d'électrons accélérés dans une chaîne, beaucoup plus élevée (§ 5) que la proportion d'électrons lents quelconques qui se mettent à s'accélérer, que l'on peut estimer à $10^{-3\pm1}$. Ces valeurs semblent plausibles d'après les considérations du paragraphe 5, suivant lesquelles s'accélèrent, parmi les électrons qui ont atteint un parcours thermique de plusieurs 10^{-7} cm, en proportion exp (— quelques unités), ceux pour lesquels ce parcours est dans le sens du champ.

Remarque. — On opposera ces facteurs de multiplication élevés à des essais négatifs effectués par Shockley [27] dans un ordre d'idées analogue. Shockley avait recherché, en vue d'applications à la rupture diélectrique, s'il y avait multiplication du photocourant à la traversée d'une jonction $p - n$; le champ dans cette jonction était de quelques 10^5 V/cm.

Malgré le champ élevé, l'essai a été négatif : l'épaisseur de cette jonction était d'environ 10^{-4} cm, tandis que les chaînes nécessitent pour leur développement une épaisseur minimum.

C'est là une des formes de la différence entre l'électroluminescence, qui est un effet « de volume » et les effets « de surface » tels ceux sur jonctions $p - n$ (*voir* Appendice, article II).

8. **L'alimentation de la bande de conductibilité en électrons.** — Dans ce qui précède, on a admis l'existence dans la bande de conductibilité d'électrons dont l'accélération provoque le phénomène d'électroluminescence. Nous devons maintenant rechercher la provenance des électrons « têtes de chaînes » responsables du phénomène.

Deux questions se posent alors [28] :

1° Ces électrons sont-ils amenés dans la bande par le champ, ou s'y trouvaient-ils amenés par voie thermique dès avant l'action du champ ?

2° D'où proviennent-ils (bande de valence, centres ou autres niveaux donneurs) ?

L'étude de la provenance des électrons avait déjà été abordée par Garlick, D. Curie, Piper et Williams, tous admettant par ailleurs le processus d'excitation des centres par les électrons accélérés posé par Destriau.

Garlick [29] avait postulé la libération par le champ d'électrons piégés provenant d'anciennes photoexcitations, ces électrons passant alors dans la bande et s'accélérant. Cela n'expliquerait pas l'électroluminescence des substances fluorescentes non phosphorescentes, telles ZnO; de plus, la libération des électrons piégés ne s'effectue pas directement (§ 2), mais sous l'impact d'autres électrons dont il resterait à expliquer la provenance.

Cependant nous concluons avec Garlick que les anciennes photoexcitations peuvent fausser les expériences d'électroluminescence si l'on n'a pas pris soin au préalable de vider les pièges : un effet Gudden-Pohl dû à ces photoexcitations se superposera initialement à l'effet Destriau. Mais, quelques secondes après l'application du champ, l'effet Gudden-Pohl aura cessé et seul subsistera l'effet Destriau.

Dans l'article II, nous rejoindrons toutefois l'idée de Garlick sous la forme suivante : après quelques temps d'action de l'effet Destriau — qui reste à expliquer en l'absence de pièges remplis — si les pièges se sont remplis par suite de l'excitation due à l'effet Destriau lui-même (et non par l'effet des excitations lumineuses antérieures, qui a disparu), l'alimentation en électrons de la bande de conductibilité sera plus abondante et l'effet Destriau en sera plus intense.

D. Curie [30] avait considéré que, les centres étant trop profonds pour être vidés directement par le champ, l'arrivée des électrons dans la bande impliquait l'existence de niveaux donneurs d'électrons beaucoup moins profonds que les centres. Mais ces niveaux pouvaient avoir été vidés, soit par le champ, soit par voie thermique. En 1951, les expériences d'effet de température étaient encore trop peu nombreuses pour décider laquelle de ces deux éventualités avait lieu.

Grosso modo, le champ vide les niveaux d'une profondeur (comptée au-dessous du bas de la bande de conductibilité) maximum ΔE_c croissant avec sa valeur; l'agitation thermique vide les niveaux d'une profondeur limite ΔE_t croissant avec la température.

Si $\Delta E_c > \Delta E_t$, l'alimentation est due au champ. Cependant certains des électrons de conductibilité ont déjà été amenés dans la bande par voie thermique; mais comme s'ils ne l'avaient pas été ils l'auraient été de toute façon au moment de l'application du champ, tout se passe comme si tous les électrons étaient libérés par celui-ci.

Si $\Delta E_c < \Delta E_t$, l'alimentation se fait par voie thermique et le champ a simplement pour effet d'accélérer les électrons libres.

Le second cas, obtenu aux températures élevées (supérieures à une limite qui croît avec le champ), se distingue du premier par l'existence d'une énergie d'activation thermique : la luminescence croissant exponentiellement avec la température alors qu'elle varie beaucoup moins vite dans le premier cas.

Depuis 1951, de nombreux auteurs ont étudié l'effet de température sur l'électroluminescence et constaté l'absence d'activation thermique : on en conclut [28] que le premier cas (*alimentation due au champ*) est celui réalisé sur les ZnS étudiés à température ordinaire. Mais on peut rechercher une activation thermique aux températures élevées.

Piper et Williams [31] suggèrent également que le ZnS serait de type *n*. Ils ont montré l'existence d'une *barrière cathodique*, qu'ils supposent être de Mott-Schottky, à haute résistance, où le champ est élevé et les niveaux donneurs ionisés jusqu'à une profondeur beaucoup plus grande que dans le reste du cristal.

Cette barrière joue par suite, lorsqu'elle existe, un rôle prépondérant dans l'alimentation de la bande. Mais l'électroluminescence peut néanmoins apparaître en l'absence d'une telle barrière, comme le montrent les expériences citées au paragraphe précédent où la substance lumineuse n'est pas au contact des électrodes, dans lesquels une barrière type Mott-Schottky ne peut pas exister : aussi, l'alimentation étant plus faible que dans le cas où il y a contact, semble-t-il falloir une épaisseur de substance laissant place au développement de chaînes à grand facteur de multiplication.

Nous allons maintenant étudier d'autres aspects des phénomènes qui nous conduiront aussi à l'idée de *niveaux donneurs d'électrons ionisés par le champ.*

La densité des électrons de conductibilité (nombre d'électrons par centimètre cube).

Considérons d'abord ceux qui proviennent des centres luminogènes excités thermiquement. On a

$$\frac{n}{\sqrt{N-n}} = \left[\frac{2\pi mkT}{h^2}\right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{E}{2kT}}, \qquad (27)$$

n densité des électrons de conductibilité;
N, densité des centres de profondeur E.

A la température ordinaire ($kT = 1/40^e$ eV) :

$$\left[\frac{2\pi mkT}{h^2}\right]^{\frac{3}{4}} = 3.10^9 \text{ cm}^{-\frac{3}{2}}.$$

Pour $N = 2.10^{18}$, ce qui correspond à 10^{-4} g de luminogène par gramme de sulfure, on dresse aisément le tableau suivant :

E (eV)...............	1.5	2	2,5	3
n (cm^{-3}).............	5.10^5	20	1.10^{-3}	4.10^{-8}

Pour ZnS (Cu), la profondeur du niveau Cu est de 2,4 eV. Pratiquement aucun électron libre ne provient des centres (pas plus que de la bande de valence, pour laquelle $N \approx 10^{23}$, mais E = 3,7 eV). Plus exactement, vu la vie 10^{-5} s d'un électron dans la bande (durées de fluorescence), on peut admettre que $10^5 n$, soit 100 électrons, arrivent dans la bande par seconde, pour retomber aussitôt.

Si les courants d'obscurité dans ZnS avaient été mesurés, on pourrait conclure à la présence d'autres niveaux donneurs que les centres dans le cas où ces courants auraient été supérieurs à 100 électrons/s. De plus, l'énergie d'activation fournirait la profondeur de ces niveaux.

Mais l'on n'a pu encore mesurer avec certitude ces courants, à cause semble-t-il du caractère pulvérulent du ZnS (Piper et Williams annoncent dans [31] une publication indiquant le procédé de fabrication de cristaux de ZnS). On en conclut qu'ils sont vraisemblablement peu intenses ($\leqq 10^{-12}$ A).

Pour CdS, Frerichs [25] a effectué des mesures sur cristal unique. Il a constaté par l'étude de la force électromotrice thermoélectrique que CdS est du type *n*. A la température ordinaire, l'énergie d'activation du courant d'obscurité $\left(\frac{E}{2} \approx 0,7 \text{ eV}\right)$ indique que les niveaux donneurs ne sont autres que les centres luminogènes. Entre l'air liquide et la température ordinaire, la décroissance du courant s'effectue avec une énergie d'activation beaucoup plus faible que 0,7 eV; d'où *l'existence dans* CdS *de niveaux donneurs beaucoup moins profonds que les centres* complètement ionisés à température ordinaire.

L'analogie de structure et de préparation entre ZnS et CdS fournit un appui à l'hypothèse de tels niveaux dans ZnS.

Signalons cependant que des expériences préliminaires effectuées récemment au Laboratoire par J. Roux ([6]), au moyen d'un capacimètre à battements — méthode de résonance, d'interprétation souvent délicate mais applicable aux poudres — semblent indiquer que les sulfures électroluminescents n'auraient pas une conductibilité à l'obscurité systématiquement plus grande que les sulfures non électroluminescents. Ceci suggère que l'alimentation de la bande de conductibilité est due au champ, l'intensité d'électroluminescence n'étant pas en relation avec le courant d'obscurité.

Considérons maintenant *le nombre de centres excités dans une cellule Destriau en fonctionnement.*

Un ordre de grandeur de la brillance d'une cellule Sylvania est le « foot-lambert » (lumen par stéradian pour une source d'un pied carré), ce qui correspond à environ 10^{14} quanta émis par seconde par centimètre carré de cellule. Il y a donc 10^{14} centres remplis par seconde, soit 10^{12} par demi-alternance dans une telle cellule, ou encore 10^{14} par demi-alternance par centimètre cube (épaisseur de la cellule : 0,1 mm).

Notons que la brillance d'un « bon » sulfure sous excitation ultraviolette usuelle est quelques dizaines de fois plus grande; mais il existe des cellules électroluminescentes atteignant 10 à 30 « foot-lamberts ».

([6]) Communication privée.

On voit que le nombre d'électrons de conductibilité à l'obscurité est beaucoup trop faible pour expliquer le nombre élevé de centres excités, même en admettant que ces électrons donnent lieu à des chaînes : il faudrait des facteurs de multiplication de l'ordre de 10^{10}, ce qui est inadmissible.

On est encore amené à considérer l'alimentation comme due au champ.

Cependant cette hypothèse rencontre une difficulté : si l'on admet que les niveaux donneurs sont répartis uniformément dans toute la substance, l'application de (27) montre qu'à moins de les supposer très peu nombreux, il faut leur attribuer dans ZnS une profondeur d'au moins 1 eV pour rendre compte de la faible valeur du courant d'obscurité. (Au contraire de ce qui se passe pour CdS, ils seraient peu ionisés à la température ordinaire.)

Mais des niveaux de 1 eV sont déjà trop profonds pour être vidés directement par un champ de 10^4 V/cm.

Cette difficulté peut être levée par l'introduction de la barrière cathodique de Piper et Williams à champ élevé, capable d'ioniser ces niveaux. Mais on a vu la possibilité de provoquer l'électroluminescence, quoique avec une alimentation beaucoup plus faible, dans le cas où une telle barrière, du type Mott-Schottky, n'existe pas. Comme l'alimentation thermique serait de toute manière trop faible, *il faut supposer, en plus des niveaux donneurs de répartition spatiale uniforme, des états électroniques superficiels* de faible profondeur.

Dans certains cas, les grains électroluminescents peuvent avoir une couche superficielle de nature chimique différente de l'intérieur, à impuretés donatrices plus nombreuses ou moins profondes (ZnS oxydé en surface). Mais, par ailleurs, il peut intervenir des « états de surface » (Tamm, Bardeen, etc.). De tels états sont considérés dans la théorie des redresseurs [32] et des transistors [33], où bien des phénomènes semblent inexplicables sans eux, par exemple, le gain de courant des transistors (Bardeen, Brattain et Shockley [34] admettant des états de surface et Aigrain [35] des impuretés acceptrices superficielles).

Ces états superficiels joueraient un rôle fondamental dans l'alimentation de la bande de conductibilité. Ils fourniraient pratiquement seuls les électrons « têtes de chaîne » en l'absence de barrière au contact des électrodes; lorsqu'il y a contact, des donneurs plus profonds seraient ionisés aussi.

Mais dans tous les cas, *même si l'alimentation s'effectue à partir de la surface, l'accélération des électrons et l'émission lumineuse qui s'ensuit ont lieu dans l'ensemble de la substance électroluminescente, si le champ qui y règne est suffisant* [28].

Nous reviendrons sur la question de l'alimentation des cellules et le rôle des donneurs suivant les différents cas dans l'article II. Mais il est clair qu'un calcul numérique précis de la profondeur et de la densité des donneurs ne pourra être effectué qu'après étude du courant d'obscurité et de son énergie d'activation.

Le nombre de donneurs ionisés rentre dans le facteur $f(E)$ de la courbe de brillance (5), de même que la probabilité d'accélération des électrons (§ 5). Ce nombre semble également varier lentement avec le champ : si l'on admet une répartition en énergie uniforme des donneurs, sa variation serait sensiblement linéaire.

Conclusion. — Nous avons vu comment les aspects généraux des expériences conduisent à décrire l'électroluminescence par le mécanisme en trois stades indiqué dans le sommaire de cet article.

Dans le second article, nous reviendrons sur la comparaison avec l'expérience d'une manière plus précise. Nous verrons comment ce mécanisme paraît en accord avec l'ensemble des résultats expérimentaux actuels et permet d'envisager de nouvelles expériences.

Manuscrit reçu le 24 avril 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Gudden B. et Pohl R. — *Z. Physik*, 1920, **2**, 192.
[2] Destriau G. — *J. Chim. Phys.*, 1936, **33**, 587.
[3] Destriau G. — *Phil. Mag.*, 1947, **38**, 700.
[4] Destriau G. — *J. Physique Rad.*, 1943, **4**, 32.
Destriau G. et Mattler J. — *J. Physique Rad.*, 1948, **9**, 259.
[5] Destriau G. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 307.
[6] Curie M. — Fluorescence et Phosphorescence, Paris, Hermann, 1946, p. 140.
[7] Bernanose A., Comte M. et Vouaux P. — *J. Chim. Phys.*, 1953, **50**, 64 et 261.
[8] Waymouth J. F., Jerome C. W. et Gungle W. C. — *The Sylvania Technologist*, 1952, **5**, 54.
[9] Mattler J. et Curie D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1086.
[10] Curie D. — *Thèse*, Paris, 1951; *Ann. Physique*, 1952, **7**, 799.
[11] Destriau G. et Mattler J. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 205.
[12] Curie D. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 317.
[13] Mott N. F. et Gurney R. W. — Electronic Processes in Ionic Crystals, Oxford, 1948, p. 168.
[14] Destriau G. — *J. Chim. Phys.*, 1937, **34**, 462.
[15] Payne E. C., Mager E. L. et Jerome C. W. — *Ill. Eng.*, 1950, **45**, 688.
[16] Shockley W. — Electrons and Holes in Semi-conductors, Van Nostrand Co, 1950, p. 223.
[17] Joliot F. — Propriétés physiques du neutron, Collège de France, 1951-1952.
[18] Dechêne G. — *J. Physique Rad.*, 1938, **9**, 109.
[19] Von Hippel A. — *J. Appl. Phys.*, 1937, **8**, 815.

[20] SEITZ F. — Théorie moderne des solides, traduit par C. Dugas, Masson, 1949, p. 620-625.
[21] BARDEEN J. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 688; *voir* aussi [20], p. 586.
[22] SHOCKLEY W. — [16], p. 263.
[23] MOTT N. F. et GURNEY R. W. — [13], p. 108 et 135.
[24] KALLMANN H. et KRAMER B. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 91.
[25] FRERICHS R. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1869.
[26] GILDART L. et EWALD A. W. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 359.
[27] MC AFEE K. B., RYDER E. J., SHOCKLEY W. et SPARKS M. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 650.
[28] CURIE D. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 135.
[29] GARLICK G. F. J. — Luminescent Materials, Oxford, 1949, p. 145.
[30] CURIE D. — Comm. Congrès de Mosbach, juillet 1951.
[31] PIPER W. W. et WILLIAMS F. E. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 51.
[32] TORREY H. C. et WHITNER C. A. — Crystal Rectifiers, Mc Graw Hill, 1948, p. 101.
[33] SHOCKLEY W. — [16], p. 31 et 97.
[34] BARDEEN J. et BRATTAIN W. H. — *Phys. Rev.*, 1949, **95**, 1208.
[35] AIGRAIN P. et DUGAS C. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 62, 194, 377 et 732.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 14, OCTOBRE 1953, PAGE 524.

CALCUL NUMÉRIQUE DES TRAJECTOIRES DANS LES SYSTÈMES CENTRÉS DE L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE

Par PIERRE GAUTIER,
Laboratoire d'Optique électronique, Toulouse.

Sommaire. — La méthode proposée est basée sur le procédé classique consistant à exprimer les dérivées d'une équation différentielle en fonction de différences finies. L'équation différentielle des trajectoires paraxiales dans une lentille magnétique ne contient pas la dérivée première. Cette circonstance permet de donner au calcul une forme très rapide. La déviation entre une trajectoire paraxiale et la trajectoire du 3e ordre correspondante est calculée d'une manière tout à fait analogue. Un exemple numérique est traité complètement.

Dans le cas général d'un champ constitué par la superposition d'un champ électrostatique et d'un champ magnétostatique admettant le même axe de révolution, et dans le cas plus particulier des lentilles électrostatiques, un changement de variable connu permet d'éliminer la dérivée première dans l'équation des trajectoires : la même méthode de calcul peut être utilisée.

Introduction. — Pour rechercher comment les propriétés optiques d'une lentille électronique sont liées à ses caractéristiques de construction, il faut étudier la topographie du champ et calculer la forme que cette topographie impose aux trajectoires des électrons.

La solution du premier problème, soit par le calcul, soit par des méthodes analogiques, soit par mesure directe, donne la topographie du champ sous la forme d'une série de valeurs numériques attachées à un ensemble de points de l'espace.

Pour connaître une trajectoire, on est conduit à résoudre une équation différentielle où cette topographie est représentée par des fonctions des coordonnées.

On peut alors rechercher, pour les fonctions de champ, des expressions mathématiques qui rendent l'équation intégrable par voie analytique, ou intégrer numériquement l'équation des trajectoires.

L'exemple le plus connu du premier procédé est celui proposé par Glaser [14] pour les lentilles magnétiques. D'autres « modèles mathématiques » ont été utilisés depuis [16], [20], [21], [32]. Ils fournissent directement les propriétés optiques en fonction de paramètres caractéristiques, mais ils ne représentent qu'approximativement les champs rencontrés en pratique.

Pour les *lentilles réelles*, que nous envisageons, le calcul numérique des trajectoires paraxiales et non paraxiales semble le mieux adapté à l'étude de tous les cas. De nombreuses méthodes ont été développées, dont l'emploi est souvent laborieux. On trouvera des indications sur ces méthodes dans les Ouvrages de Mathématiques appliquées tels que ceux de MM. Scarborough et Willers [5], [6]. En ce qui concerne les applications à l'Optique électronique, on se rapportera aux publications [3 (p. 37-38)] [8], [9], [12], [18], [19], [22], [23], [24], [25], [29], [30], [31], [33], [34].

Nous proposons ici, pour la conduite des calculs, une méthode comparable à celles que nous avons citées, en ce qui concerne la précision, mais dont l'emploi est plus rapide.

Nous exposons la méthode de calcul sur le cas particulier des lentilles magnétiques; nous l'illustrons par un exemple numérique.

Nous montrons ensuite que le cas général des champs électrique et magnétique superposés, à symétrie de révolution, peut être traité par le même procédé, lequel reste encore valable en présence d'une charge d'espace susceptible d'intervenir dans certains dispositifs.

Pour la démonstration des résultats classiques

que nous utilisons, nous renvoyons aux traités généraux d'Optique électronique.

Toutes les grandeurs sont mesurées dans le système M. K. S. rationalisé de Giorgi.

1. Lentilles magnétiques : calcul des trajectoires paraxiales. — La trajectoire d'un électron dans un champ magnétique à symétrie de révolution est connue si l'on a su déterminer les deux fonctions $r(z)$ et $\varphi(z)$ qui représentent, en coordonnées cylindriques, la distance r de l'électron à l'axe de révolution Oz et sa rotation φ autour de cet axe.

Nous appellerons, pour simplifier l'exposé, *trajectoire méridienne* une trajectoire contenue dans un plan méridien en dehors de la région où règne le champ (1).

Dans tout ce qui suit, nous n'envisagerons que des *trajectoires méridiennes*. Leur connaissance suffit, à condition d'y joindre l'expression de la courbure de Petzval [15], pour déterminer les éléments cardinaux et les aberrations géométriques du 3e ordre.

1° *Établissement de la formule de récurrence utilisée.* — *a.* Dans une lentille magnétique, l'équation différentielle des trajectoires électroniques paraxiales s'écrit [4] :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{eB^2}{8mV} r = 0. \tag{1}$$

Dans cette expression, $B = B(0, z)$ est la valeur de l'induction magnétique *sur* l'axe Oz (Wb/m²). V est la tension d'accélération des électrons (volts). On tiendra compte aisément de la correction relativiste de masse en écrivant à la place de V [17] :

$$U = V(1 + 0{,}978 \cdot 10^{-6}\, V). \tag{2}$$

$\frac{e}{m}$ est la charge spécifique de l'électron :

$$\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11} \quad \text{Cb/kg}.$$

Tous les calculs qui suivent, développés dans le cas de l'électron, restent évidemment valables pour un corpuscule de charge q quelconque : il suffit de remplacer partout $-e$ par q.

Il est commode d'utiliser des variables réduites; nous mesurerons toutes les longueurs avec une unité convenable d, en posant :

$$x = \frac{z}{d}, \qquad y = \frac{r}{d}. \tag{3}$$

La longueur d sera caractéristique de la lentille étudiée; ce sera, par exemple, la « demi-largeur » a du champ selon Glaser [14], le rayon R du trou percé dans les pièces polaires, etc. Nous poserons, en outre :

$$B(x) = B_{\max}\, b(x), \tag{4}$$

$B_{\max}$ étant l'induction maximum, et nous caractériserons la « puissance » de la lentille par le paramètre

$$k^2 = \frac{eB_{\max}^2 d^2}{8mV}. \tag{5}$$

Pour une lentille symétrique, cette expression de k^2 coïncide avec celle définie par Glaser [14] si $d = a$, avec celle définie par Liebmann [22] si $d = R$.

Avec ces conventions, l'équation (1) devient :

$$y'' + T(x)\, y = 0, \tag{6}$$

avec

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$T(x) = k^2\, b^2(x). \tag{7}$$

La forme particulière de l'équation (6), où y' ne figure pas explicitement, permet une intégration numérique rapide que nous allons aborder.

b. Partageons le domaine de variation de la variable réduite x en intervalles égaux Δx, définissant une suite de points équidistants $x_0, x_1, x_2, \ldots x_l, \ldots, x_n, \ldots$. Les points correspondants sur la trajectoire méridienne sont $P_0, P_1, \ldots, P_l, \ldots, P_n, \ldots$ (*fig.* 1). La méthode proposée va consister à progresser « pas à pas » le long de la trajectoire, à partir du point objet P_0, en calculant l'ordonnée y_{n+1} au point P_{n+1} lorsque cette grandeur est connue aux points précédents P_n et P_{n-1}.

Soit $y = y(x)$ une solution de l'équation (6), $y_n, y'_n, y''_n, \ldots$, les valeurs de cette fonction et de ses dérivées au point P_n.

Les valeurs y_{n+1} et y_{n-1} de $y(x)$ aux points P_{n+1} et P_{n-1} s'obtiennent par les développements en série de Taylor :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x\, y'_n + \frac{\Delta x^2}{2} y''_n + \frac{\Delta x^3}{6} y'''_n + \frac{\Delta x^4}{24} y^{(4)}_n + \ldots, \tag{8}$$

$$y_{n-1} = y_n - \Delta x\, y'_n + \frac{\Delta x^2}{2} y''_n - \frac{\Delta x^3}{6} y'''_n + \frac{\Delta x^4}{24} y^{(4)}_n - \ldots. \tag{9}$$

En retranchant et en additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient successivement :

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\,\Delta x} - \left(\frac{\Delta x^2}{6} y'''_n + \ldots\right), \tag{10}$$

$$y''_n = \frac{y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n}{\Delta x^2} - \left(\frac{\Delta x^2}{12} y^{(4)}_n + \ldots\right). \tag{11}$$

Soit $T_n = T(x_n)$ la valeur de la fonction $T(x)$ au point x_n. En substituant l'expression (11) dans

(1) Cette convention est adoptée par de nombreux auteurs. *Voir*, en particulier, L. de Broglie, *Optique électronique et corpusculaire*. Il reste bien entendu que, dans la région où règne un champ magnétique, apparaît une rotation du plan méridien, caractéristique des lentilles électroniques magnétiques.

l'équation (6), il vient, après multiplication par Δx^2 :

$$y_{n+1} = (2 - T_n \Delta x^2)\, y_n - y_{n-1} + \varepsilon, \tag{12}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\Delta x^4}{12} y_n^{(4)} + \dots \tag{13}$$

Si l'intervalle d'intégration Δx est choisi assez petit, le terme correctif ε, du 4e ordre en Δx, est négligeable : l'égalité (12) avec $\varepsilon = 0$ est alors une relation de récurrence très simple qui permet de calculer y_{n+1}, lorsque y_n et y_{n-1} sont connus.

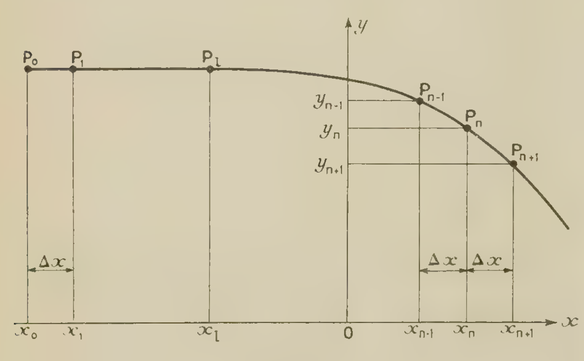


Fig. 1.

2° *Exécution pratique des calculs.* — On commence par dresser un tableau des valeurs de x_n et de $(2 - T_n \Delta x^2)$ depuis le point objet ($x = x_0$) jusqu'à une région où l'on pense avoir toute la partie intéressante de la trajectoire.

Pour pouvoir commencer les calculs au moyen de la formule (12), il nous faut les deux valeurs successives de y au point objet x_0 et au point immédiatement voisin $x_1 = x_0 + \Delta x$. Posons que pour $x = x_0$, on a :

$$y_0 = h, \qquad y'_0 = p.$$

Les équations (10) et (12), avec

$$\frac{\Delta x^2}{6} y_0''' + \dots = 0, \qquad \varepsilon = 0,$$

permettent de calculer y_1. On trouve qu'aux conditions initiales $y_0 = h$, $y'_0 = p$ correspondent les *valeurs de départ* :

$$y_0 = h, \qquad y_1 = h + p\,\Delta x - h T_0 \frac{\Delta x^2}{2}. \tag{14}$$

Deux cas importants se rencontrent en pratique :

a. La trajectoire entre dans la lentille parallèlement à l'axe ($y'_0 = p = 0$). On choisira pour x_0 un point assez éloigné pour que le champ de la lentille soit négligeable ($T_0 = 0$). On a alors les valeurs de départ $y_0 = y_1 = h$.

b. La trajectoire part d'un point de l'axe ($y_0 = h = 0$), hors du champ ou dans le champ, avec une pente finie p. Les valeurs de départ sont alors :

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = p\,\Delta x.$$

Les valeurs de départ une fois connues, on calcule y_2, y_3, ..., y_m, ... par la formule (12), avec $\varepsilon = 0$. La disposition pratique des calculs est indiquée sur le tableau I. Pour obtenir chaque nombre E de la colonne de droite, il suffit d'effectuer une multiplication et une soustraction; on a : ($E = G \times D - C$) (*voir* tableau I). On continue ainsi jusqu'au point image x_i ou jusqu'à ce qu'on ait obtenu toute la partie intéressante de la trajectoire. Les calculs sont extrêmement rapides. Cette commodité d'emploi de la méthode permet de diminuer sans inconvénients l'intervalle Δx, afin d'augmenter la précision. Quand la longueur d est de l'ordre de grandeur du rayon des pièces polaires, ou de la « demi-largeur » de Glaser, l'expérience montre qu'avec un intervalle réduit $\Delta x = 0{,}1$ la précision sur le résultat final est largement suffisante pour tous les cas pratiques actuels (²).

TABLEAU I.

x_n.	$2 - T_n \Delta x^2$.	y_n.
x_0	$2 - T_0 \Delta x^2$	h
x_1	$2 - T_1 \Delta x^2$	$h + p\,\Delta x - h T_0 \frac{\Delta x^2}{2}$
....	....	....
....	....	....
		C
x_l	G	D
		E

2. **Lentilles magnétiques. Calcul de la déviation entre une trajectoire paraxiale et la trajectoire du 3e ordre correspondante.** — 1° *Établissement de la formule de récurrence utilisée.* — *a.* L'équation (1) est obtenue en ne conservant dans les équations du mouvement de l'électron que les termes du 1er ordre en r. Comme nous ne considérons que des trajectoires « méridiennes », cette approximation constitue l'approximation de Gauss, au sens habituel de l'Optique géométrique lumineuse.

Nous allons maintenant pousser plus loin les approximations. On montre (*voir* ci-dessous § 4) qu'en conservant les termes du 3e ordre en r et $r' = \frac{dr}{dz}$ dans l'équation générale des trajectoires méridiennes, on obtient l'équation des trajectoires « du 3e ordre » :

$$r'' + \frac{eB^2}{8mV} r = \frac{1}{8V}\left[\frac{e}{2m} BB'' - \frac{1}{2V}\left(\frac{e}{2m} B^2\right)^2\right] r^3 + \frac{1}{8V}\frac{e}{m} BB' r^2 r' - \frac{1}{4V}\frac{e}{2m} B^2 r r'^2, \tag{15}$$

(²) Nous ne parlerons pas ici des facteurs affectant la précision. Une étude en est faite dans l'article de Liebmann [22]. D'autre part, le lecteur trouvera dans la publication de Duncan [10] un moyen d'apprécier et de diminuer l'erreur sur le résultat final de l'intégration.

B', B'' étant les dérivées de B sur l'axe de symétrie $\left(B' = \frac{dB}{dz}, B'' = \frac{d^2B}{dz^2}\right)$.

Avec les notations (3), (4) et (5) ci-dessus, cette équation s'écrit :

$$y'' + T(x)y = S(x, y, y'), \tag{16}$$

où

$$S(x, y, y') = k^2b^2\left[\left(\frac{1}{2}\frac{b''}{b} - k^2b^2\right)y^3 + \frac{b'}{b}y^2y' - yy'^2\right]. \tag{17}$$

b. Nous voulons calculer les écarts par rapport à la dioptrique de Gauss et en déduire les coefficients d'aberrations. En intégrant numériquement l'équation (16) avec les mêmes conditions initiales que (6), et en faisant la différence des résultats obtenus, les calculs seraient très laborieux. De plus, on serait conduit à soustraire des nombres très voisins : l'erreur sur la différence serait inacceptable.

Nous considérons des trajectoires qui diffèrent toujours très peu d'une trajectoire paraxiale : la comparaison des équations (6) et (16) montre que le second membre S de (16) se comporte comme un terme correctif. Représentons alors par :

y, l'ordonnée réduite d'une trajectoire paraxiale;
$y + \delta y$, l'ordonnée réduite de la trajectoire du 3ᵉ ordre correspondante;
(δy sera traité comme un infiniment petit du 1ᵉʳ ordre).

En substituant $y + \delta y$ à la place de y dans l'expression (16), et en tenant compte de l'équation (6), on obtient :

$$(\delta y)'' + T(x)(\delta y) = S(x, y, y'). \tag{18}$$

c. Si l'on a déterminé une trajectoire méridienne paraxiale $y(x)$, on peut, dans l'expression (18), calculer le second membre qui devient une fonction connue de x. On obtient ainsi pour la variable δy une équation différentielle *linéaire*; elle donne directement les écarts par rapport à la dioptrique de Gauss. Son caractère linéaire en permet une intégration numérique simple.

La dérivée y' intervenant dans S est calculée au moyen de la formule (10) où l'on néglige le terme entre parenthèses, du second ordre en Δx. Si Δx est assez petit, cette approximation est légitime pour le calcul de la fonction perturbatrice $S(x, y, y')$. On obtient ainsi une série de valeurs $S_n = S(x_n)$ de cette fonction, correspondant à chaque point $x = x_n$. En utilisant l'expression (11) de la dérivée seconde en fonction de différences finies, avec δy à la place de y, et en substituant dans l'équation (18), on obtient :

$$\boxed{(\delta y)_{n+1} = (2 - T_n\,\Delta x^2)(\delta y)_n - (\delta y)_{n-1} + S_n\,\Delta x^2 + \eta,} \tag{19}$$

avec

$$\eta = \frac{\Delta x^4}{12}(\delta y)_n^{(4)} + \ldots, \tag{20}$$

Δx étant le même intervalle d'intégration que ci-dessus, supposé petit, η est négligeable : l'égalité (19) avec $\eta = 0$ est alors une relation de récurrence simple qui permet de calculer $(\delta y)_{n+1}$ lorsque $(\delta y)_n$ et $(\delta y)_{n-1}$ sont connus.

2° *Exécution pratique des calculs.* — Les déviations sont nulles au point objet et dans son voisinage immédiat. Les valeurs de départ seront donc toujours ici

$$(\delta y)_0 = (\delta y)_1 = 0.$$

On commence par dresser, sur une feuille séparée, un tableau des valeurs de y'_n calculées par (10), avec

$$\frac{\Delta x^2}{6}y'''_n + \ldots = 0,$$

ainsi que des valeurs de $\left(\frac{b'}{b}\right)_n$ et $\left(\frac{b''}{b}\right)_n$. La méthode expérimentale d'étude des lentilles magnétiques réelles, mise au point dans ce laboratoire [11], [13] permet d'obtenir directement b' et b'' avec la même précision que b; ceci facilite beaucoup les calculs des rapports $\frac{b'}{b}$ et $\frac{b''}{b}$ ci-dessus. On calcule ensuite la série des valeurs S_n de la fonction S au moyen de la formule (17).

On porte les valeurs de $S_n\,\Delta x^2$ dans une colonne située à droite de y_n sur la feuille de calcul de la trajectoire paraxiale. La disposition pratique est indiquée sur le tableau II. Lorsque S est connu, les calculs sont analogues et presque aussi rapides que pour la trajectoire paraxiale. On avait $E = (G \times D) - C$; on a maintenant $E' = (G \times D') - C' + F$ (*voir* tableau II).

Tableau II.

x_n.	$2 - T_n\,\Delta x^2$.	y_n.	$S_n\,\Delta x^2$.	$(\delta y)_n$.
x_0	–	–	–	0
x_1		–		0
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
x_l	G	C, D, E	F	C', D', E'

Remarque. — La déviation δy ainsi calculée permettra de déterminer les coefficients d'aberrations *géométriques* du 3ᵉ ordre. Nous avons supposé implicitement que les électrons utilisés sont parfaitement monocinétiques et que les champs des lentilles sont parfaitement constants. Ce n'est jamais le cas, et il en résulte une aberration « chromatique »; on peut la calculer par une méthode analogue à celle décrite ci-dessus. Nous l'indiquerons dans l'Appendice I.

3. **Exemple d'application de la méthode.** — Pour illustrer cette méthode, nous avons choisi

comme exemple le champ rigoureusement calculable proposé par Glaser [14] :

$$b(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{avec} \quad k^2 = 1$$

et les conditions initiales

$$x_0 = -3,1, \qquad y_0 = 0,1, \qquad y'_0 = 0,$$

l'intervalle d'intégration Δx étant pris égal à 0,1. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous $\left(\frac{1}{f},\ x_i,\ C_s,\right.$ sont respectivement la convergence réduite, l'abscisse du point où la trajectoire coupe l'axe, la constante d'aberration sphérique$\left.\right)$.

Constante de la lentille.	Valeur exacte.	Résultat du calcul numérique.	Erreur (pour 100).
$\frac{1}{f}$	0,829	$0,827_{(5)}$	—0,19
x_i	0,777	$0,776_{(3)}$	—0,086
C_s	0,786	0,783	—0,38

Exemple de calcul.

$$b(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad k^2 = 1; \qquad x_0 = -3,1; \qquad y_0 = 0,1; \qquad y'_0 = 0; \qquad \Delta x = 0,1.$$

x_n.	$2 - T_n\,\Delta x^2$.	y_n.	$S_n\,\Delta x^2$.	$(\delta y)_n$.
—3,1	1,999 911	0,1	0,000 000 020	0
—3,0	900	0,1	25	0
—2,9	887	0,0 999 900	3	0,000 000 025
—2,8	872	0,0 999 687	35	80
—2,7	854	346	4	0,000 000 170
—2,6	834	0,0 998 859	5	300
—2,5	810	206	6	480
—2,4	781	0,0 997 363	7	720
—2,3	747	6 302	85	0,000 001 03
—2,2	707	4 989	0,000 000 102	1 42
—2,1	658	3 384	122	1 91
—2,0	600	1 439	148	2 52
—1,9	529	0,0 989 097	178	3 28
—1,8	444	6 289	217	4 22
—1,7	339	2 933	251	5 37
—1,6	211	0,0 978 927	300	6 78
—1,5	053	4 149	350	8 48
—1,4	1,998 859	0,0 968 448	400	0,000 010 52
—1,3	618	1 642	428	12 95
—1,2	320	0,0 953 507	440	15 79
—1,1	1,997 952	943 770	330	19 04
—1,0	500	932 100	189	22 58
—0,9	1,996 948	918 100	—0,000 000 150	26 25
—0,8	282	901 298	740	29 69
—0,7	1,995 496	0,0 881 145	—0,000 001 657	32 28
—0,6	1,994 593	857 023	2 941	33 07
—0,5	1,993 600	828 267	5 24	30 74
—0,4	1,992 568	794 210	6 21	22 97
—0,3	1,991 583	754 250	7 57	0,000 008 82
—0,2	1,990 754	707 941	8 88	—0,000 012 98
—0,1	1,990 197	655 086	7 80	—0,000 043 54
0	1,990 000	595 809	6 54	81 47
0,1	1,990 197	530 574	4 85	—0,000 125 13
0,2	1,990 754	460 138	3 25	172 41
0,3	1,991 583	385 448	1 79	221 34
0,4	1,992 568	307 514	—0,000 000 97	270 20
0,5	1,993 600	227 295	79	318 02
0,6	1,994 593	145 621	46	364 59
0,7	1,995 496	0,0 063 160	180	409 65
0,8	1,996 282	—0,0 019 585	—0,000 000 037	453 04
0,9	948	—0,0 102 257	–	—0,000 494 78

$$x_i = 0,776_{(3)}, \qquad \frac{1}{f} = 0,827_{(5)}, \qquad (\delta y)_i = -0,000\,443.$$

Le même exemple, traité dans les mêmes conditions, par M. G. Liebmann, au moyen de la méthode qu'il a proposée [22] conduisait aux résultats suivants :

Constante de la lentille.	Valeur exacte.	Résultat du calcul numérique.	Erreur (pour 100).
$\frac{1}{f}$	0,829	0,824	—0,60
x_i	0,777	0,778	+0,13
C_s	0,786	0,789	+0,32

Comme on le voit, les deux méthodes sont comparables au point de vue de la précision. Il apparaît cependant que celle que nous proposons ici est plus rapide.

Pour la détermination des valeurs des éléments cardinaux et des coefficients d'aberrations à partir des résultats numériques, nous renvoyons à la publication de M. G. Leibmann [22].

Nous reproduisons ci-dessous la feuille de calcul correspondant à l'exemple traité. Sur la figure 2 sont tracées la trajectoire paraxiale $y(x)$ et la déviation $\delta y(x)$ entre cette trajectoire et la trajectoire du 3e ordre correspondante; les petits cercles représentent les points calculés.

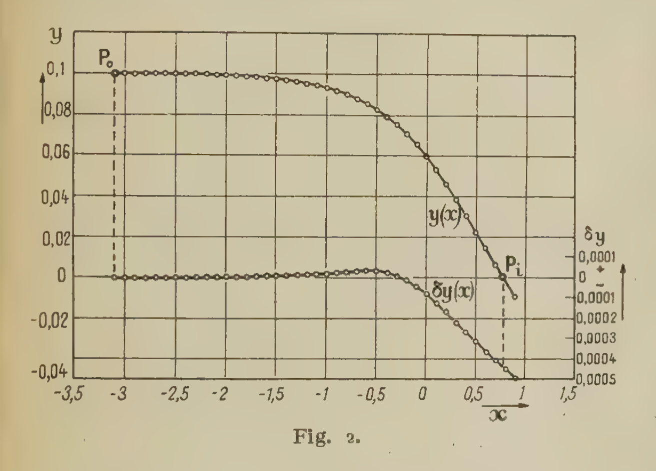


Fig. 2.

4. Extension de la méthode précédente à un système centré quelconque d'optique électronique. — Considérons un champ constitué par la superposition d'un champ électrostatique et d'un champ magnétostatique admettant le même axe de symétrie de révolution (système centré). Nous repérons les points de ce champ dans un système de coordonnées orthogonales cylindriques $r\varphi z$, l'axe Oz coïncidant avec l'axe de symétrie. En chacun de ses points, le champ est défini par le potentiel scalaire électrostatique $V(r, z)$ et par l'unique composante $A_\varphi = A(r, z)$ du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$.

A l'approximation non relativiste, l'équation générale des trajectoires électroniques méridiennes est (*voir*, par exemple, Liebmann G. [22])

$$r'' - \frac{1+r'^2}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial r} - r'\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0, \qquad (21)$$

avec

$$Q = V(r, z) - \frac{e}{2m}A^2(r, z). \qquad (22)$$

La rotation du plan méridien autour de l'axe est donnée par l'équation différentielle du 1er ordre

$$\varphi' = \sqrt{\frac{e}{2m}}\,\frac{A}{r}\sqrt{\frac{1+r'^2}{Q}}. \qquad (23)$$

Dans ces expressions, les accents représentent des dérivations par rapport à z.

Nous supposons que la densité de courant et la densité de charge électrique sont nulles dans l'espace où circulent les électrons (³). Avec ces hypothèses, le potentiel scalaire et le potentiel vecteur satisfont à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \Delta\vec{A} = 0.$$

Ils peuvent s'exprimer en tous les points voisins de l'axe par les développements en série (⁴)

$$V(r, z) = V - \frac{V''}{2^2}r^2 + \ldots + (-1)^n\frac{V^{(2n)}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}r^{2n} + \ldots, \qquad (24)$$

$$A(r, z) = B\frac{r}{2} - \frac{B''}{2^2}\frac{r^3}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{B^{(2n)}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\,\frac{r^{2n+1}}{2n+2} + \ldots, \qquad (25)$$

V'', ..., B'', ..., étant les dérivées de $V = V(0, z)$ et de $B = B(0, z)$ *sur* l'axe.

La fonction Q définie par (22) s'écrit alors :

$$Q = V - \frac{V''}{4}r^2 + \frac{V^{(4)}}{64}r^4 + \ldots - \frac{e}{2m}\left(\frac{B}{2}r - \frac{B''}{16}r^3 + \ldots\right)^2. \qquad (26)$$

En substituant cette expression dans (21) et (23) et en négligeant les termes du 4e ordre en r et r', on obtient les équations de la trajectoire « du 3e ordre »

$$r'' - Pr' - Nr = Lr^3 + Mr^2r' + Nrr'^2 + Pr'^3, \qquad (27)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{1}{8V}\left[\left(\frac{V^{(4)}}{4} + \frac{e}{2m}BB''\right) - \frac{1}{2V}\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right)^2\right],\\
M &= \frac{1}{8V}\left[\left(V''' + \frac{e}{m}BB'\right) - \frac{V'}{V}\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right)\right],\\
N &= -\frac{1}{4V}\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right),\\
P &= -\frac{V'}{2V};
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$\varphi' = \sqrt{\frac{e}{8mV}}\,B\left[1 + \frac{r'^2}{2} + \frac{r^2}{8}\left(\frac{V''}{V} + \frac{eB^2}{2mV} - \frac{B''}{B}\right)\right]. \qquad (29)$$

(³) Nous montrerons plus loin (§ 6) comment on pourrait tenir compte de la présence d'une charge d'espace.

(⁴) *Voir*, par exemple [1], p. 139 et 140.

Dans les lentilles purement magnétiques, V est uniforme et égal à la tension d'accélération des électrons : ses dérivées successives sur l'axe sont nulles et l'équation (27) se réduit à l'équation (15). Dans le cas général, et dans les lentilles électrostatiques, V n'est pas uniforme : le coefficient P de la dérivée première r' au 1er membre de l'équation différentielle des trajectoires n'est pas nul. Faisons alors dans l'équation (27) le changement de variable proposé par Picht [26]

$$R = r\,e^{-\frac{1}{2}\int^{z} P\,dz} = r V^{\frac{1}{4}} \qquad (e = 2,71828\ldots). \quad (30)$$

Après quelques calculs élémentaires, mais assez longs, on obtient comme équation transformée

$$R'' + T(z)R = S(z, R, R'), \quad (31)$$

avec

$$T(z) = \frac{3}{16}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + \frac{eB^2}{8mV}, \quad (32)$$

$$S(z, R, R') = \frac{1}{\sqrt{V}}(I.R^3 + J.R^2R' + K.RR'^2 + P.R'^3), \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{1}{8V}\Bigg[\left(\frac{V^{(4)}}{4} + \frac{e}{2m}BB''\right) - \frac{1}{2V}\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{V'}{V}\left(V''' + \frac{e}{m}BB'\right) \\ &\quad + \frac{1}{8}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{V'}{V}\right)^3 V'\Bigg], \\ J &= \frac{1}{8V}\left[V''' + \frac{e}{m}BB' - \frac{3V'}{4}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right], \\ K &= \frac{1}{8V}\left[3\frac{V'}{V}V' - 2\left(V'' + \frac{e}{2m}B^2\right)\right], \\ P &= -\frac{V'}{2V}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

L'équation (31) a exactement la même forme que l'équation (16). La dérivée première R' ne figure pas au 1er membre, et la méthode de calcul exposée ci-dessus s'applique sans changement. On effectuera tous les calculs numériques sur la transformée R de r, y compris ceux des écarts δR par rapport à la dioptrique de Gauss.

5. **La rotation de l'électron.** — Elle est donnée par l'équation différentielle du 1er ordre (29). Pour une trajectoire paraxiale, cette expression se réduit à

$$\varphi' = \sqrt{\frac{e}{8mV}}\,B. \quad (35)$$

Pour les mêmes raisons que celles indiquées ci-dessus (§ 2, 1°, *b*), on calculera la déviation entre la rotation d'une trajectoire paraxiale et celle de la trajectoire du 3e ordre correspondante par une méthode analogue à celle utilisée pour la trajectoire méridienne. Bornons-nous au cas particulier des lentilles magnétiques. Soit φ la rotation d'une trajectoire paraxiale. Introduisons, comme on l'a fait au paragraphe 2 pour y, la variable $\delta\varphi$, nulle à l'approximation de Gauss, que nous traitons comme un infiniment petit du 1er ordre et telle que la rotation de la trajectoire du 3e ordre soit $\varphi + \delta\varphi$. Avec les notations (3), (4) et (5) du paragraphe 1, les équations (29) et (35) s'écrivent :

$$(\varphi')_{3^e\,\text{ordre}} = kb\left[1 + \frac{y'^2}{2} + \left(k^2b^2 - \frac{1}{4}\frac{b''}{b}\right)\frac{y^2}{2}\right], \quad (36)$$

$$(\varphi')_{\text{paraxial}} = kb. \quad (37)$$

En substituant $\varphi + \delta\varphi$ et $y + \delta y$ à la place de φ et de y dans l'expression (36), compte tenu de (37), on obtient :

$$(\delta\varphi)' = kb\left[\frac{y'^2}{2} + \left(k^2b^2 - \frac{1}{4}\frac{b''}{b}\right)\frac{y^2}{2}\right]. \quad (38)$$

Si l'on a déterminé une trajectoire méridienne paraxiale $y(x)$, on peut calculer le crochet au 2e membre de (38). On a alors, par simple quadrature :

$$\varphi = k\int_{x_0}^{x} b\,dx, \quad (39)$$

$$\delta\varphi = k\int_{x_0}^{x} b\left[\frac{y'^2}{2} + \left(k^2b^2 - \frac{1}{4}\frac{b''}{b}\right)\frac{y^2}{2}\right]dx. \quad (40)$$

Au point image $x = x_i$, les expressions (39) et (40) sont des intégrales définies que l'on peut calculer numériquement. Le nombre $(\delta\varphi)_i$ contient les défauts « anisotropes » de l'image (coma et astigmatisme anisotropes, distorsion de rotation) particuliers aux lentilles magnétiques.

Remarque. — Si les champs de la lentille ne sont pas parfaitement constants, il existe également une « aberration chromatique de rotation » que nous calculerons à l'Appendice I.

6. **Les lentilles électrostatiques. Influence de la charge d'espace.** — *a.* Dans le cas important des lentilles électrostatiques pures (B nul partout), il n'y a pas de rotation des électrons, et les expressions des fonctions T et S intervenant dans l'équation (31) des trajectoires se simplifient. On trouve :

$$T(z) = \frac{3}{16}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} S(z, R, R') &= \frac{1}{\sqrt{V}}\Bigg\{\frac{1}{8}\Bigg[\frac{V^{(4)}}{V} - \frac{1}{4}\frac{V'}{V}\frac{V'''}{V} \\ &\qquad + \frac{1}{16}\left(\frac{V'^2}{V^2} + \frac{V''}{V}\right)^2 - \frac{9}{16}\left(\frac{V''}{V}\right)^2\Bigg]R^3 \\ &\quad + \frac{1}{8}\left[\frac{V'''}{V} - \frac{3}{4}\left(\frac{V'}{V}\right)^3\right]R^2R' \\ &\quad + \frac{1}{8}\left[3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - 2\frac{V''}{V}\right]RR'^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)R'^3\Bigg\}. \end{aligned} \quad (42)$$

b. Certaines lentilles électrostatiques (canon à électrons) possèdent une charge d'espace non

négligeable. La densité de charge électrique ρ dans l'espace où circulent les électrons ne peut plus être considérée comme nulle : le potentiel V_ρ, en présence de charge d'espace, ne satisfait plus alors à l'équation de Laplace, mais à l'équation de Poisson

$$\Delta V_\rho = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F/m}). \tag{43}$$

Nous admettons que la charge d'espace possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Développons ρ et V_ρ en série des puissances de r^2 sous la forme

$$\rho(r, z) = \rho_0(z) + \rho_1(z)\, r^2 + \ldots, \tag{44}$$

$$V_\rho(r, z) = V_\rho + C_1(z) r^2 + C_2(z) r^4 + \ldots, \tag{45}$$

où $V_\rho = V_\rho(0, z)$ représente le potentiel *sur* l'axe de symétrie. En substituant ces expressions dans (43), on obtient après identification

$$V_\rho(r, z) = V_\rho - \left(V''_\rho + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\right)\frac{r^2}{4} + \left(V^{(4)}_\rho + \frac{\rho''_0 - 4\rho_1}{\varepsilon_0}\right)\frac{r^4}{64} \mp \ldots \tag{46}$$

La répartition $V_\rho(z)$ du potentiel sur l'axe en présence de charge d'espace est évidemment différente de la répartition $V(z)$ lorsque $\rho = 0$. Elle sera, en général, très difficile à déterminer, ainsi que les fonctions ρ_0 et ρ_1. On n'en connaît, pour l'instant, aucun moyen de calcul simple. Dans les cas particuliers où ce calcul serait possible (par approximations successives, par exemple) [23], il faudrait substituer l'expression (46) du potentiel à la place de V dans la fonction Q définie par (22).

Conclusion. — La méthode proposée n'est qu'une forme particulière d'un procédé de calcul classique et bien connu. Elle repose au départ sur la même idée que le calcul dit « de relaxation » pour la solution des équations aux dérivées partielles (équation de Laplace). Ceci suggère d'imaginer, pour effectuer les calculs de la formule (12), un réseau électrique « analogue » dont on trouvera la description de principe à l'Appendice II. Un tel réseau a été utilisé par MM. Prebus et Zlotowski [27], [28]. (*)

La méthode de calcul numérique directe conduit certainement à des résultats plus précis. Il ne semble pas qu'elle ait été proposée jusqu'à présent sous la forme complète (calcul des aberrations) que nous lui avons donnée [5].

(*) *Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Un réseau identique a été construit et essayé récemment par H. A. Hampikian (*C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 1864). Le principe en avait été décrit antérieurement en France par MM. P. Grivet et Y. Rocard (*Revue Scientifique*, 1949, p. 85).

[5] La publication de Burfoot [8] repose sur la même idée de base. Dans la méthode de cet auteur la précision par intervalle est meilleure, puisque le 1er terme négligé est du 6e ordre en Δx, mais les formules de récurrence sont un peu plus compliquées.

Ce travail a été effectué au laboratoire d'Optique électronique de Toulouse sous la direction de M. G. Dupouy, Membre de l'Institut, Directeur du Centre National de la Recherche Scientifique et du Laboratoire d'Optique électronique de Toulouse. MM. Ch. Fert et E. Durand, Professeurs à la Faculté des Sciences de Toulouse, ont bien voulu m'aider de leurs critiques et de leurs conseils. Mlle N. Calvel, du Laboratoire de Mathématiques appliquées de la Faculté des Sciences de Toulouse, s'est chargée des calculs numériques. Je les prie de trouver ici l'expression de mes bien vifs remerciements.

APPENDICE I.

L'aberration chromatique des lentilles magnétiques. — *a.* Reprenons l'équation différentielle (6) des trajectoires paraxiales dans une lentille magnétique

$$y'' + k^2 b^2(x) y = 0, \tag{I.1}$$

avec

$$k^2 = \frac{e B^2_{\max} d^2}{8 m V}. \tag{I.2}$$

Supposons que le courant d'alimentation I de la lentille et la tension d'accélération V varient de quantités petites δI et δV. Nous admettons que la variation δI est assez petite pour ne pas modifier la répartition du champ $b(x)$, et qu'elle entraîne simplement une variation de l'induction maximum

$$\delta B_{\max} \cong \frac{\mathrm{d}B_{\max}}{\mathrm{d}I}\,\delta I. \tag{I.3}$$

Des variations simultanées du courant et du potentiel accélérateur il résulte, dans cette hypothèse (légitime si la variation de courant δI est assez faible), une variation relative du paramètre d'excitation

$$\frac{\delta k^2}{k^2} = 2\frac{\delta B_{\max}}{B_{\max}} - \frac{\delta V}{V}. \tag{I.4}$$

Nous supposons, de plus, que les variations δI et δV s'effectuent pendant un temps très grand devant le temps de parcours des électrons entre la cathode et l'écran d'observation. Pour chaque trajectoire électronique individuelle, on peut alors admettre que l'« excitation » de la lentille est constante et égale à $k^2 + \delta k^2$. Soit y l'ordonnée réduite d'une trajectoire paraxiale pour $\delta k^2 = 0$, $y + \delta y$ celle qui correspond à $\delta k^2 \neq 0$. En substituant $y + \delta y$, $k^2 + \delta k^2$ dans l'équation (I.1) et en traitant δy comme un infiniment petit du 1er ordre, il vient :

$$(\delta y)'' + k^2 b^2(x)(\delta y) = -(\delta k^2)\, b^2(x) y. \tag{I.5}$$

Cette équation a exactement la même forme que l'équation (18). On peut l'écrire :

$$(\delta y)'' + T(x)(\delta y) = S(x, y), \tag{I.6}$$

avec

$$S(x, y) = -(\delta k^2) b^2(x) y. \qquad (I.7)$$

La méthode de calcul ci-dessus, basée sur la relation de récurrence (19) s'applique sans aucun changement.

b. De l'équation (39), on tire immédiatement qu'à une variation δk correspond une « aberration chromatique de rotation »

$$\delta\varphi = (\delta k) \int_{x_0}^{x} b \, dx, \qquad (I.8)$$

avec

$$\delta k = k \left(\frac{\delta B_{max}}{B_{max}} - \frac{1}{2} \frac{\delta V}{V} \right). \qquad (I.9)$$

APPENDICE II.

Considérons le réseau électrique de la figure 3. Il est constitué par des bobines de même coefficient de self-induction L connectées en série et par des condensateurs de capacités différentes C_n placés en dérivation entre chaque connexion P_n de deux bobines successives et un conducteur (masse) dont le potentiel est pris comme potentiel de référence, égal à zéro. L'ensemble constitue une ligne artificielle, non homogène, s'étendant très loin de part et d'autre de P_n.

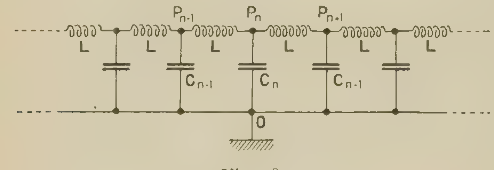


Fig. 3.

On relie deux points successifs P_0 et P_1 de cette ligne à un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω, de sorte que les amplitudes des potentiels en ces points soient V_0 et V_1. Soient V_{n-1}, V_n, V_{n+1} les amplitudes des potentiels aux points P_{n-1}, P_n, P_{n+1}. Écrivons qu'en chaque point P_n il n'y a pas d'accumulation d'électricité : la somme des courants qui arrivent en ce point est nulle

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{V_{n-1} - V_n}{iL\omega} + \dfrac{V_{n+1} - V_n}{iL\omega} + \dfrac{0 - V_n}{\dfrac{1}{iC_n\omega}} = 0 \\ (i^2 = -1). \end{array} \right\} \qquad (II.1)$$

L'équation (II.1) peut s'écrire :

$$V_{n+1} = (2 - LC_n\omega^2) V_n - V_{n-1}. \qquad (II.2)$$

Elle sera identique à l'équation (12) (avec $\varepsilon = 0$) si l'« échelle » du réseau électrique ci-dessus est choisie de telle sorte qu'en chaque point P_n on ait

$$LC_n\omega^2 = T_n \Delta x^2.$$

Les potentiels successifs V_n le long de la ligne représenteront alors les ordonnées de la trajectoire paraxiale correspondant à la répartition de champ $T(x)$ et aux valeurs de départ

$$y_0 = V_0, \qquad y_1 = V_1.$$

Manuscrit reçu le 23 mars 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

a. Ouvrages généraux :

[1] DE BROGLIE L. — Optique électronique et corpusculaire. Paris, Hermann, 1950.
[2] BRUCHE E. et SCHERZER O. — Geometrische Elektronenoptik. Berlin, Springer, 1944.
[3] COSSLETT V. E. — Introduction to Electron Optics. Oxford, Clarendon Press, 1946.
[4] DUPOUY G. — Éléments d'Optique électronique. Paris, A. Colin, 1951.
[5] SCARBOROUGH J. B. — Numerical Mathematical Analysis. Oxford, University Press.
[6] WILLERS Fr. A. — Practical Analysis. New-York, Dover Publications, Inc.
[7] ZWORYKIN V. K., MARTON G. A., RAMBERG E. G., HILLIER J. et VANCE A. W. — Electron Optics and the Electron Microscope. New-York, Wiley, 1946.

b. Publications originales :

[8] BURFOOT J. C. — *Brit. J. Appl. Phys.*, 1952, **3**, 22-24.
[9] DOSSE J. — *Z. Physik*, 1941, **117**, 722.
[10] DUNCAN W. J. — *Phil. Mag.*, 1948, **39**, 493.
[11] FERT Ch. et GAUTIER P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 148.
[12] GANS R. — *Z. techn. Phys.*, 1937, **18**, 41.
[13] GAUTIER P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 361.
[14] GLASER W. — *Z. Physik*, 1941, **117**, 285-315.
[15] GLASER W. — *Z. Physik*, 1935, **97**, 195.
[16] GLASER W. — *Z. Angew. Math. Phys.*, 1951, **2**, 444.
[17] GLASER W. — *Z. Physik*, 1933, **81**, 637; 1933, **83**, 104.
[18] GODDARD L. S. — *Proc. Phys. Soc.*, 1944, **56**, 372.
[19] GODDARD L. S. et KLEMPERER O. — *Proc. Phys. Soc.*, 1944, **56**, 378.
[20] GRIVET P. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 1 A.
[21] HUTTER R. G. E. — *J. Appl. Phys.*, 1945, **16**, 680-699.
[22] LIEBMANN G. — *Proc. Phys. Soc.*, 1949, **62**, 753.
[23] MALOFF I. G. et EPSTEIN D. W. — *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1934, **22**, 1386.
[24] VAN MENTS M. et LE POOLE J. B. — *Appl. Sc. Research*, 1947, **1**, 3.
[25] MOTZ H. et KLANFER L. — *Proc. Phys. Soc.*, 1946, **58**, 30.
[26] PICHT J. — *Ann. Physik*, 1932, **15**, 926.
[27] PREBUS A. F., ZLOTOWSKI I. (Ohio State University) et KRON G. (Gen. Electric. Co). — *Phys. Rev.*, 1945, **67**, 202.
[28] PREBUS A. F. et ZLOTOWSKI I. — *Phys. Rev.*, 1945, **67**, 203.
[29] RAMBERG E. G. — *J. Appl. Phys.*, 1942, **13**, 582.
[30] RECKNAGEL A. — *Z. Physik*, 1937, **104**, 381.
[31] SIDAY R. E. — *Proc. Phys. Soc.*, 1942, **54**, 266.
[32] SIEGBAHN K. — *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 1943, **30**, 1-12.
[33] SPANGENBERG K. et FIELD L. M. — *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1942, **30**, 138.
[34] STÖRMER C. — *Arch. Sc. Phys. Nat.*, 1907, **24**, 221.

THÉORIE MAGNÉTO-IONIQUE DES GAZ FAIBLEMENT IONISÉS EN PRÉSENCE D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE OSCILLANT ET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE CONSTANT

Par RAYMOND JANCEL et THÉO KAHAN,
Institut Henri Poincaré, Sorbonne.

Sommaire. — En s'appuyant sur une méthode de solution de l'équation intégro-différentielle de Boltzmann, on calcule les fonctions de répartition dans un gaz ionisé non uniforme permettant de donner des expressions explicites pour la conductivité magnéto-ionique en présence d'un champ électrique oscillant et d'un champ magnétique constant pour le tenseur de conductivité, pour le tenseur diélectrique, pour l'effet Hall, pour la déviation d'un faisceau électronique et pour une généralisation de la formule de mobilité de Langevin. Discussion et comparaison avec d'autres méthodes de calcul.

L'objet du présent Mémoire est la théorie magnéto-ionique de milieux gazeux non uniformes légèrement ionisés, fondée non pas sur des méthodes approchées s'appuyant sur la notion du libre parcours moyen, mais sur l'équation intégro-différentielle de Boltzmann.

Pour préciser les idées, rappelons brièvement certains caractères d'un gaz idéal composé d'une seule espèce de constituants, en particulier la notion de la distribution des vitesses moléculaires $\mathbf{v}$ (de composantes v_x, v_y, v_z). Soit

$$f(\mathbf{v})\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = f(\mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{v}$$

le nombre de particules par unité de volume dont les composantes de vitesse sont comprises entre v_x et $v_x + \mathrm{d}v_x$, v_y et $v_y = \mathrm{d}v_y$ et v_z et $v_z = \mathrm{d}v_z$; f est par définition la fonction de répartition des vitesses $\mathbf{v}$. L'intégrale triple de cette fonction étendue aux composantes de vitesse

$$n = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(\mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{v},$$

est la densité des molécules. Soit G une fonction quelconque de la vitesse corpusculaire; la valeur moyenne ou l'espérance mathématique $E(G)$ de G se définit par l'expression

$$\overline{G} = E(G) = \frac{1}{n} \iiint G f\, \mathrm{d}\mathbf{v}.$$

Si le gaz est uniforme, la fonction f représente la distribution maxwellienne dans les conditions classiques :

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] \qquad (v = |\mathbf{v}|).$$

La répartition des vitesses des particules chargées dans un milieu gazeux ayant une température et une pression uniformes n'est pas nécessairement maxwellienne si leur densité n'est pas uniforme ou si des champs extérieurs sont mis en jeu. Dans de tels cas, la fonction de distribution des vitesses f ne dépendra pas seulement de la vitesse $\mathbf{v}$, mais aussi de la position $\mathbf{r}$ et du temps t. L'équation intégro-différentielle qui régira dès lors l'évolution de la fonction $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{t})$ sera précisément celle de Boltzmann [1], [2], [3].

1. Équations générales. — On considère le gaz ionisé comme un mélange de molécules neutres et d'électrons et l'on suppose ce milieu soumis à l'action d'un champ électrique oscillant $\mathbf{E}\cos\omega t$ et d'un champ magnétique constant $\mathbf{H}$; on suppose de plus que les chocs entre électrons et molécules sont élastiques. Pour déterminer les propriétés électriques de ce milieu, il est nécessaire de connaître les fonctions de répartition des vitesses pour les constituants du gaz : on fera ce calcul pour l'état stationnaire en utilisant l'équation intégro-différentielle de Maxwell-Boltzmann.

Si f_1 et f_2 sont les fonctions de répartition respectives des molécules et des électrons, on a les deux équations de Boltzmann :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1\, \mathbf{grad}_{r_1} f_1 = \frac{\partial_e f_1}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v}_2\, \mathbf{grad}_{r_2} f_2 + \mathbf{F}_2\, \mathbf{grad}_{v_2} f_2 = \frac{\partial_e f_2}{\partial t} \tag{2}$$

(où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ désignent respectivement la vitesse des molécules et des électrons). Dans l'équation (1), on suppose qu'aucune force extérieure n'agit sur les molécules; d'autre part $\mathbf{F}_2$ représente l'action électromagnétique sur les électrons du champ $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$; enfin $\frac{\partial_e f_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial_e f_2}{\partial t}$ sont les contributions des chocs entre molécules, électrons-molécules et électrons.

Si l'on s'intéresse à l'état où l'on a

$$\mathbf{grad}_{r_1} f_1 = \mathbf{grad}_{r_2} f_2 = 0;$$

f_1 et f_2 sont seulement fonctions de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et du temps éventuellement. Nous supposerons de plus dans la suite des calculs que le gaz ionisé peut être traité comme un gaz de Lorentz; ce dernier répond aux deux conditions suivantes :

a. La masse m_1 des molécules du 1er constituant est grande par rapport à la masse des particules du 2e constituant;

b. L'influence des chocs mutuels entre les particules du 2e constituant est négligeable comparée à celle de leurs chocs avec les molécules du 1er constituant.

On voit que la 1re condition est réalisée sans hypothèse supplémentaire, étant donné la petitesse du rapport $\frac{m_2}{m_1}$ (m_1 et m_2 désignant respectivement la masse des molécules et des électrons); par contre, la 2e condition n'est réalisée que si la densité électronique est faible : les calculs qui suivent ne sont donc valables que pour les gaz faiblement ionisés.

Cette hypothèse étant admise, on en tire deux conséquences :

1° Dans les chocs électrons-molécules, la variation de vitesse des molécules sera négligeable en moyenne, de sorte que la fonction f_1 est peu affectée par les chocs de cette nature; donc $f_1(v_1)$ est maxwellien dans l'état stationnaire et l'on peut remplacer (1) par

$$f_1(v_1) = n_1\left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}\right], \tag{3}$$

où n_1 est le nombre de molécules par unité de volume et T la température absolue du gaz;

2° Dans l'équation (2), la seule contribution appréciable du terme $\frac{\partial_e f_2}{\partial t}$ sera fournie par les chocs molécules-électrons. Le problème est donc ramené à l'étude de l'équation (2) dans cette hypothèse. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= \frac{e_2}{m_2}\mathbf{E}\cos\omega t + \frac{e_2}{m_2}(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{H})\\ &= \mathbf{\Gamma}_2\cos\omega t + \frac{e_2}{m_2}(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{H}),\end{aligned} \tag{4}$$

où e_2 désigne la charge de l'électron. En explicitant $\frac{\partial_e f_2}{\partial t}$, l'équation (2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_2}{\partial t} + \left[\mathbf{\Gamma}_2\cos\omega t + \frac{e_2}{m_2}(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{H})\right]\mathbf{grad}_{v_2} f_2\\ &\quad = \iiint (f_1' f_2' - f_1 f_2)\,gb\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\mathbf{v}_1;\end{aligned} \tag{5}$$

f_1' et f_2' sont les fonctions f_1 et f_2 prises pour les valeurs $\mathbf{v}_1'$ et $\mathbf{v}_2'$; $\mathbf{v}_1'$ et $\mathbf{v}_2'$ étant les vitesses respectives des particules après un choc où les vitesses initiales étaient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$; g est la vitesse relative des deux particules

$$(g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|)$$

et b et ε sont les paramètres d'impact.

2. Calcul de l'approximation d'ordre zéro. — On utilise pour résoudre l'équation (5) la méthode d'approximations successives de Picard-Enskog, en mettant en évidence les termes en $\mathbf{\Gamma}_2$ et $(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)$; on développe f_2 en fonction de ses harmoniques sphériques, soit (en se limitant à la 1re approximation) :

$$\begin{aligned}f_2 = f_2^{(0)} &+ (\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2)(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)\\ &+ (\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{v}_2(\xi_2^{(1)}\cos\omega t + \eta_2^{(1)}\sin\omega t)\end{aligned} \tag{6}$$

où $f_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$ et $\eta_2^{(1)}$ ne dépendent que de v_2 ($v_2 = |\mathbf{v}_2|$).

Portons le développement (6) dans (5); on doit calculer des termes de la forme suivante :

$$\mathbf{grad}_{v_2}[\alpha_2^{(1)}(\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2)] = \alpha_2^{(1)}\mathbf{\Gamma}_2 + (\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2)\frac{\mathbf{v}_2}{v_2}\frac{\partial\alpha_2^{(1)}}{\partial v_2}$$

(ainsi qu'un terme analogue en $\beta_2^{(1)}$);

$$\begin{aligned}&\mathbf{grad}_{v_2}[(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{v}_2\xi_2^{(1)}]\\ &\quad = (\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\xi_2^{(1)} + (\mathbf{H},\mathbf{\Gamma}_2,\mathbf{v}_2)\frac{\mathbf{v}_2}{v_2}\frac{\partial\xi_2^{(1)}}{\partial v_2}\end{aligned}$$

(et un terme analogue en $\eta_2^{(1)}$).

Identifions alors respectivement les termes scalaires, les termes en $\mathbf{\Gamma}_2$ et $(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)$; il vient

$$\begin{aligned}&\Gamma_2^2\cos\omega t\Big[(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)\\ &\qquad + \frac{1}{3}v_2\left(\frac{\partial\alpha_2^{(1)}}{\partial v_2}\cos\omega t + \frac{\partial\beta_2^{(1)}}{\partial v_2}\sin\omega t\right)\Big]\\ &\quad = \iiint (f_1' f_2'^{(0)} - f_1 f_2^{(0)})\,gb\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\mathbf{v}_1,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2}{v_2}\Big[\omega v_2(-\alpha_2^{(1)}\sin\omega t + \beta_2^{(1)}\cos\omega t) + \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2}\cos\omega t\\ &\qquad - \frac{e_2 H^2}{m_2}v_2(\xi_2^{(1)}\cos\omega t + \eta_2^{(1)}\sin\omega t)\Big]\\ &\quad = \iiint\{f_1'(\alpha_2^{(1)\prime}\cos\omega t + \beta_2^{(1)\prime}\sin\omega t)(\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2')\\ &\qquad - f_1(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)(\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{v}_2)\}gb\\ &\qquad \times \mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\mathbf{v}_1,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{v}_2\Big[\omega(-\xi_2^{(1)}\sin\omega t + \eta_2^{(1)}\cos\omega t)\\ &\qquad + \frac{e_2}{m_2}(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)\Big]\\ &\quad = \iiint\{f_1'(\xi_2^{(1)\prime}\cos\omega t + \eta_2^{(1)\prime}\sin\omega t)[(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{v}_2']\\ &\qquad - f_1(\xi_2^{(1)}\cos\omega t + \eta_2^{(1)}\sin\omega t)[(\mathbf{H}\wedge\mathbf{\Gamma}_2)\mathbf{v}_2]\}gb\\ &\qquad \times \mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\mathbf{v}_1.\end{aligned} \tag{9}$$

Les intégrales de (8) et (9) s'évaluent aisément en remarquant que, d'après les conditions qui définissent un gaz de Lorentz, on peut poser $v_2' = v_2 = g$ et se servir de l'équation (3). Pour résoudre (7),

multiplions les deux membres par $d\mathbf{v}_2 = 4\pi v_2^2\, dv_2$ et intégrons de o à v_2; il vient

$$\frac{4\pi}{3}\Gamma_2^2 \cos\omega t[v_2^2(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)]$$
$$= \iiiint (f'_1 f_2^{(0)\prime} - f_1 f_2^{(0)})gb\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_2.$$

Le calcul de l'intégrale du second membre s'effectue comme l'indiquent Chapman et Cowling [3] et l'on trouve

$$\frac{1}{3}\Gamma_2^2 \cos\omega t(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)$$
$$= \frac{kT}{m_1\lambda}\frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2} + \frac{m_2 v_2}{m_1\lambda} f_2^{(0)}, \tag{10}$$

où $\lambda(v_2)$ est le libre parcours moyen d'un électron pour la vitesse v_2. De même, les équations (8) et (9) deviennent

$$\omega v_2(-\alpha_2^{(1)}\sin\omega t + \beta_2^{(1)}\cos\omega t)$$
$$+ \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2}\cos\omega t - \frac{e_2 H^2}{m_2} v_2(\xi_2^{(1)}\cos\omega t + \eta_2^{(1)}\sin\omega t)$$
$$= -\frac{(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)v_2^2}{\lambda}, \tag{11}$$

$$\omega(-\xi_2^{(1)}\sin\omega t + \eta_2^{(1)}\cos\omega t)$$
$$+ \frac{e_2}{m_2}(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t + \beta_2^{(1)}\sin\omega t)$$
$$= -\frac{(\xi_2^{(1)}\cos\omega t + \eta_2^{(1)}\sin\omega t)v_2}{\lambda}. \tag{12}$$

Le 2e membre de (10) ne dépendant pas du temps, nous devons prendre la valeur moyenne sur une période du 1er membre; l'équation (10) doit donc être remplacée par

$$\frac{\Gamma_2^2}{6}\alpha_2^{(1)} = \frac{kT}{m_1\lambda}\frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2} + \frac{m_2 v_2}{m_1\lambda} f_2^{(0)}. \tag{10'}$$

D'autre part, les équations (11) et (12) donnent chacune deux équations par identification des termes en $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$; soit

$$\omega v_2 \alpha_2^{(1)} + \frac{e_2}{m_2} H^2 v_2 \eta_2^{(1)} = \frac{\beta_2^{(1)} v_2^2}{\lambda} \tag{11'}$$

$$\omega v_2 \beta_2^{(1)} + \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2} - \frac{e_2}{m_2} H^2 v_2 \xi_2^{(1)} = -\frac{\alpha_2^{(1)} v_2^2}{\lambda}; \tag{11''}$$

$$-\omega\xi_2^{(1)} + \frac{e_2}{m_2}\beta_2^{(1)} = -\frac{\eta_2^{(1)} v_2}{\lambda}, \tag{12'}$$

$$\omega\eta_2^{(1)} + \frac{e_2}{m_2}\alpha_2^{(1)} = -\frac{\xi_2^{(1)} v_2}{\lambda}. \tag{12''}$$

Les cinq équations (10′), (11′), (11″), (12′) et (12″) permettent de calculer les cinq fonctions inconnues $f_2^{(0)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$ et $\eta_2^{(1)}$. Si l'on pose

$$z(v_2) = \frac{e_2^2 H^2 \lambda^2}{m_2^2(\lambda^2\omega^2 + v_2^2)} \tag{13}$$

et

$$A(v_2) = \left[\frac{\lambda^2\omega^2(1-z)^2 + v_2^2(1+z)^2}{\lambda(1+z)}\right], \tag{14}$$

on a

$$\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f_2^{(0)}}\frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial v_2} = -\frac{6 m_2 v_2 A}{6kTA + \Gamma_2^2 m_1\lambda},$$

d'où

$$f_2^{(0)} = C\exp\left[-\int_0^{v_2}\frac{6 m_2 v_2 A\, dv_2}{6kTA + \Gamma_2^2 m_1\lambda}\right], \tag{15}$$

où C doit être telle que

$$\int_0^\infty f_2^{(0)}\, d\mathbf{v}_2 = n_2.$$

3. **Discussion de l'équation** (15). — 1° Il est facile de montrer [4] qu'elle comporte, comme cas particuliers, les résultats obtenus antérieurement par Chapman et Cowling [3], Margenau [5], Druyvesteyn [6]. En effet :

a. Si $\omega = 0$ (cas d'un champ électrique constant), les relations (13) et (14) s'écrivent

$$z(v_2) = \frac{e_2^2 H^2 \lambda^2}{m_2^2 v_2^2} \quad \text{et} \quad A(v_2) = \frac{v_2^2(1+z)}{\lambda}.$$

L'équation (15) s'écrit alors

$$f_2^{(0)} = C\exp\left(-\int_0^{v_2}\frac{6 m_2 v_2^2(1+z)\, dv_2}{6kTv_2^2(1+z) + \Gamma_2^2 m_1\lambda^2}\right). \tag{15 a}$$

On voit aisément qu'elle correspond à la formule donnée par Chapman et Cowling, dans le cas où le terme en Γ_2^2 est prépondérant par rapport à celui en kT.

b. Si $H = 0$, on voit de même que

$$z = 0 \quad \text{et} \quad A(v_2) = \frac{\lambda^2\omega^2 + v_2^2}{\lambda};$$

d'où pour l'équation (15) :

$$f_2^{(0)} = C\exp\left(-\int_0^{v_2}\frac{m_2 v_2\, dv_2}{kT + \dfrac{\Gamma_2^2 m_1\lambda^2}{6(v_2^2 + \omega^2\lambda^2)}}\right). \tag{15b}$$

On voit que (15 *b*) est identique au résultat trouvé par Margenau [5] dans le cas d'un gaz ionisé soumis seulement à l'action d'un champ électrique oscillant.

c. Si, dans (15 *b*), on fait $\omega = 0$ et si l'on suppose de plus que kT est négligeable devant le terme en Γ_2^2, (15 *b*) devient

$$f_2^{(0)} = C\exp\left(-\int_0^{v_2}\frac{6 m_2 v_2^3\, dv_2}{\Gamma_2^2 m_1\lambda^2}\right). \tag{15 c}$$

Dans le cas où λ est indépendant de v_2, on voit que (15 *c*) donne une répartition en $e^{-v_2^4}$ qui correspond, aux notations près, à la formule donnée par Druyvesteyn [6] pour les gaz ionisés soumis à des champs électrostatiques forts.

d. Si l'on suppose au contraire que, dans (15), le terme en kT est prépondérant devant le terme

en Γ_2^2 (ce qui correspond soit au cas d'une intensité électrique E faible, soit à des fréquences ω très élevées), on voit alors que $f_2^{(0)}$ est maxwellien et que la « température électronique » est égale à la température absolue du gaz, T.

2° Il est intéressant de remarquer que l'expression de $f_2^{(0)}$ dépend essentiellement du libre parcours $\lambda(v_2)$. Or $\lambda(v_2)$ dépend de la loi d'interaction entre électrons et molécules; en effet, on le calcule à partir des paramètres définissant une collision par les relations suivantes :

$$\lambda(v_2) = \frac{v_2}{2\pi n_1 \varphi_{12}(v_2)}, \tag{16}$$

avec

$$\varphi_{12}(v_2) = \int_0^\infty (1 - \cos\chi) g b \, \mathrm{d}b,$$

où χ représente la variation angulaire de la vitesse relative durant une collision; généralement l'angle χ sera une fonction de la vitesse relative g et du paramètre d'impact b, fonction dont l'expression est déterminée par la loi d'interaction.

Par conséquent, la fonction de répartition exacte des vitesses des électrons libres, à l'approximation d'ordre zéro, dépend de la loi d'interaction entre les électrons et les molécules. Il est donc utile de calculer $\lambda(v_2)$ pour les gaz réels, soit théoriquement, soit à partir des résultats expérimentaux.

Signalons deux cas particuliers importants :

a. Cas des molécules sphériques et rigides, avec chocs élastiques; on a

$$\varphi_{12}(v_2) = \frac{1}{2} v_2 \sigma_{12}^2, \qquad \text{avec} \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

(où σ_1 et σ_2 sont les diamètres respectifs des deux sortes de particules). On obtient alors

$$\lambda(v_2) = \frac{1}{\pi n_1 \sigma_{12}^2}, \tag{16 a}$$

soit λ indépendant de v_2.

b. Cas où la force entre molécules et électrons varie comme $\frac{1}{r^5}$; le calcul montre que $\lambda(v_2)$ est proportionnel à v_2, de sorte que la fréquence de collision $\frac{v_2}{\lambda} = \nu$ est indépendante de v_2. On montre alors facilement que $f_2^{(0)}$ est maxwellien, mais avec une « température électronique » $T' > T$. En effet, si l'on pose

$$\frac{v_2}{\lambda(v_2)} = \nu \quad \text{(fréquence de collision)} \tag{17}$$

et

$$\frac{e_2 H}{m_2} = s \quad \text{(gyrofréquence des électrons)}, \tag{18}$$

on a

$$z = \frac{s^2}{\omega^2 + \nu^2} \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned} A &= \lambda \left[\frac{\omega^2(\omega^2 + \nu^2 - s^2)^2 + \nu^2(\omega^2 + \nu^2 + s^2)^2}{(\omega^2 + \nu^2)(\omega^2 + \nu^2 + s^2)} \right] \\ &= \lambda \, g(\nu) \end{aligned} \tag{20}$$

et $f_2^{(0)}$ s'écrit alors

$$f_2^{(0)} = n_2 \left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\rho v_2^2}, \tag{21}$$

avec

$$\rho = \frac{3 m_2 g(\nu)}{6kT g(\nu) + \Gamma_2^2 m_1}.$$

On voit donc que $f_2^{(0)}$ est maxwellien avec une « température électronique » donnée par

$$T' = T\left(1 + \frac{\Gamma_2^2 m_1}{6kT g(\nu)}\right). \tag{22}$$

La grandeur $g(\nu)$ tend vers l'infini avec ω^2, de sorte que le terme correctif défini par (22) devient négligeable pour les fréquences élevées.

4. **Expression de $f_2^{(0)}$ dans le cas où $\lambda(v_2)$ est constant.** — L'équation (15) s'intègre complètement si l'on suppose λ indépendant de v_2; on pose alors : $\lambda^2\omega^2 + v_2^2 = u$ et l'on est ramené à l'intégration de fractions rationnelles en u^2 et u. On obtient le résultat suivant, exprimé directement en fonction de v_2 :

$$f_2^{(0)} = C' e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} \left[\left(1 + \frac{v_2^2}{M}\right)^{1+\delta} \left(1 + \frac{v_2^2}{M'}\right)^{1-\delta} \right]^{\frac{m_2 \gamma}{4kT}}, \tag{23}$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Gamma_2^2 m_1 \lambda^2}{6kT}, \\ M &= \frac{1}{2}\left[2\lambda^2(s^2 + \omega^2) + \gamma\left(1 + \sqrt{1 + \Delta}\right)\right], \\ M' &= \frac{1}{2}\left[2\lambda^2(s^2 + \omega^2) + \gamma\left(1 - \sqrt{1 + \Delta}\right)\right], \\ \delta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta}} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \frac{16 s^2 \omega^2 \lambda^4}{\gamma^2}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Dans le cas où $H = 0$, on peut montrer que l'on retrouve à partir de (23) la formule donnée par Margenau pour un gaz ionisé soumis seulement à un champ électrique oscillant. En effet, on a dans ce cas, d'après (24) :

$$M = \lambda^2\omega^2 + \gamma, \qquad M' = 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \delta = 1$$

et (23) devient

$$f_2^{(0)} = C'' e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} \left(1 + \frac{v_2^2}{\lambda^2\omega^2 + \gamma}\right)^{\frac{m_2 \gamma}{2kT}} \tag{23'}$$

qui est identique, aux notations près, au résultat trouvé par Margenau [5].

On peut développer en série le logarithme du

crochet de (23), ce qui permet d'approcher $f_2^{(0)}$ par une exponentielle; on a, en effet :

$$\log\left[\left(1+\frac{v_2^2}{M}\right)^{1+\delta}\left(1+\frac{v_2^2}{M'}\right)^{1-\delta}\right]^{\frac{m_2\gamma}{4kT}}$$
$$=\frac{m_2\gamma}{4kT}\left[(1+\delta)\log\left(1+\frac{v_2^2}{M}\right)+(1-\delta)\log\left(1+\frac{v_2^2}{M'}\right)\right]$$
$$=\frac{m_2\gamma}{4kT}\left[(1+\delta)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\left(\frac{v_2^2}{M}\right)^j + (1-\delta)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\left(\frac{v_2^2}{M'}\right)^j\right]$$

D'où

$$f_2^{(0)}=C''\exp\left\{-\frac{m_2v_2^2}{2kT}\left[1-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1+\delta}{M}+\frac{1-\delta}{M'}\right)\right] - \frac{m_2\gamma}{4kT}\left[\frac{1+\delta}{2M^2}+\frac{1-\delta}{2M_2'^2}\right]v_2^4+\dots\right\}. \quad (25)$$

Mais ce développement doit être utilisé avec précaution, car il n'est rigoureusement valable que pour $v_2^2<M'<M$, c'est-à-dire en fait pour les hautes fréquences. Il peut cependant faciliter le calcul numérique de valeurs approchées et permettre de remplacer $f_2^{(0)}$, dans le cas des hautes fréquences, par une répartition maxwellienne avec une « température électronique » plus élevée que la température du gaz.

5. **Expression générale du courant.** — Il se calcule à partir de la vitesse de diffusion $\mathbf{w}_2$ des électrons, d'après la relation

$$\mathbf{I}=n_2e_2\mathbf{w}_2. \quad (26)$$

$\mathbf{w}_2$ s'exprimant en fonction de l'approximation d'ordre un de f_2, nous devons donc calculer les fonctions $\alpha_2^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$ et $\eta_2^{(1)}$; celles-ci s'obtiennent aisément à partir des équations (11′), (11″), (12′) et (12″), lorsque $f_2^{(0)}$ est connu. On a

$$\alpha_2^{(1)}=6m_2v_2f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right], \quad (27)$$

$$\beta_2^{(1)}=6m_2\omega\lambda\frac{1-z}{1+z}f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right], \quad (28)$$

$$\xi_2^{(1)}=6e_2\frac{\lambda}{\lambda^2\omega^2+v_2^2}\times\left(\lambda^2\omega^2\frac{1-z}{1+z}-v_2^2\right)f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right], \quad (29)$$

$$\eta_2^{(1)}=-6e_2\omega\frac{\lambda^2}{\lambda^2\omega^2+v_2^2}\,\frac{2v_2}{1+z}f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right]. \quad (30)$$

D'après la définition de $\mathbf{w}_2$, le courant $\mathbf{I}$ s'écrit :

$$\mathbf{I}=n_2e_2\mathbf{w}_2=\frac{4\pi n_2e_2}{3}\times\left\{\left[\int_0^\infty(\alpha_2^{(1)}\cos\omega t+\beta_2^{(1)}\sin\omega t)v_2^4\,dv_2\right]\boldsymbol{\Gamma}_2 + \left[\int_0^\infty(\xi_2^{(1)}\cos\omega t+\eta_2^{(1)}\sin\omega t)v_2^4\,dv_2\right](\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{\Gamma}_2)\right\}.$$

Soit en désignant par $6m_2J$ et $6e_2J'$ les intégrales du second membre et en se souvenant que

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=\frac{e_2\mathbf{E}}{m_2},$$

il vient

$$\mathbf{I}=\mu\left[J\mathbf{E}+\frac{e_2}{m_2}J'(\mathbf{H}\wedge\mathbf{E})\right] \quad (31)$$

en posant

$$\mu=8\pi n_2e_2^2.$$

Il est utile d'écrire les intégrales J et J' sous la forme

$$J=K_1\cos\omega t+\omega K_2\sin\omega t, \quad (32)$$
$$J'=K_1'\cos\omega t-2\omega K_2'\sin\omega t, \quad (33)$$

où K_1, K_2, K_1' et K_2' sont les intégrales suivantes :

$$K_1=\int_0^\infty v_2^5f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right]dv_2, \quad (34)$$

$$K_2=\int_0^\infty v_2^4\lambda\frac{1-z}{1+z}f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right]dv_2, \quad (35)$$

$$K_1'=\int_0^\infty v_2^4\frac{\lambda}{\lambda^2\omega^2+v_2^2}\times\left(\lambda^2\omega^2\frac{1-z}{1+z}-v_2^2\right)f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right]dv_2 \quad (36)$$

$$K_2'=\int_0^\infty\frac{v_2^5}{1+z}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2\omega^2+v_2^2}f_2^{(0)}\left[\frac{1}{6kTA+\Gamma_2^2m_1\lambda}\right]dv_2 \quad (37)$$

(Dans les formules précédentes et leurs applications, on suppose que $\iiint f_2^{(0)}\,d\mathbf{v}_2=1$.)

Les propriétés électriques du gaz ionisé sont donc décrites par $f_2^{(0)}$ et les quatre intégrales précédentes et l'étude numérique, au moins approximative, de ces expressions est nécessaire à la connaissance des grandeurs (conductivité, par exemple) qui déterminent la propagation des ondes électromagnétiques dans un tel milieu [7].

On peut, sans diminuer la généralité, choisir les axes de telle sorte que l'influence du champ magnétique soit mise en évidence. Prenons, en effet, Ox parallèle à $\mathbf{E}$, Oy à $(\mathbf{H}\wedge\mathbf{E})$, Oz complétant le trièdre; les composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont alors respectivement $(E, 0, 0)$ et $(H_x, 0, H_z)$. Si φ désigne l'angle défini par $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, on a encore

$$H_x=H\cos\varphi, \qquad H_z=H\sin\varphi.$$

Les composantes de $\mathbf{I}$ sont alors données par :

$$I_x=\mu(K_1\cos\omega t+\omega K_2\sin\omega t)E, \quad (38)$$
$$I_y=\mu(K_1'\cos\omega t-2\omega K_2'\sin\omega t)sE\sin\varphi, \quad (39)$$
$$I_z=0,$$

où s, donné par (18), est la gyrofréquence des électrons dans le champ $\mathbf{H}$.

Avant d'appliquer ces résultats, nous allons calculer la valeur de $\mathbf{I}$ dans deux cas particuliers.

6. Valeur de I dans des cas particuliers. —

a. La fréquence de collision $\nu = \frac{v_2}{\lambda}$ *est indépendante de* v_2. — Nous avons vu que dans ce cas $f_2^{(0)}$ est maxwellien et s'exprime par (21); les intégrales K_1, K'_1, K_2 et K'_2 se calculent alors aisément en fonction de ν et $g(\nu)$. On obtient

$$K_1 = \frac{1}{8\pi m_2} \frac{\nu}{g(\nu)}, \tag{40}$$

$$K_2 = \frac{1}{8\pi m_2} \frac{\omega^2 + \nu^2 - s^2}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} \frac{1}{g(\nu)}, \tag{41}$$

$$K'_1 = \frac{1}{8\pi m_2} \frac{1}{\omega^2 + \nu^2} \left(\omega^2 \frac{\omega^2 + \nu^2 - s^2}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} - \nu^2 \right) \frac{1}{g(\nu)}, \tag{42}$$

$$K'_2 = \frac{1}{8\pi m_2} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} \frac{1}{g(\nu)}. \tag{43}$$

On tire alors de (31) l'expression générale du courant, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = {} & \frac{n_2 e_2^2}{m_2 g(\nu)} \\ & \times \left\{ \left(\nu \cos\omega t + \omega \frac{\omega^2 + \nu^2 - s^2}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} \sin\omega t \right) \mathbf{E} \right. \\ & + \frac{e_2}{m_2} \left[\frac{1}{\omega^2 + \nu^2} \right. \\ & \times \left(\omega^2 \frac{\omega^2 + \nu^2 - s^2}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} - \nu^2 \right) \cos\omega t \\ & \left. \left. - \frac{2\omega\nu}{\omega^2 + \nu^2 + s^2} \sin\omega t \right] (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}) \right\}. \end{aligned} \tag{44}$$

b. Cas où $H = 0$, ω *et* E *étant petits.* — Plus précisément, nous supposons ici que ω^2 et Γ_2^2 sont négligeables. La condition $H = 0$ donne $z = 0$ [d'après (13)] et

$$A = \frac{\lambda^2 \omega^2 + v_2^2}{\lambda}.$$

On voit donc que pour ω suffisamment petit, on peut poser

$$A \# \frac{v_2^2}{\lambda}.$$

D'autre part, Γ_2^2 étant négligeable, on voit immédiatement d'après (15) que $f_2^{(0)}$ est maxwellien soit

$$f_2^0 = \left(\frac{m_2}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[- \frac{m_2 v_2^2}{2 k T} \right].$$

Avec ces hypothèses, on peut alors écrire

$$K_1 \# \frac{\lambda}{6 k T} \int_0^{\infty} v_2^3 f_2^{(0)} \, \mathrm{d}v_2 = \frac{\lambda}{6\sqrt{2 m_2 k T}} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}},$$

on trouve de même

$$K_2 \# \frac{\lambda^2}{6 k T} \int_0^{\infty} v_2^2 f_2^{0} \, \mathrm{d}v_2 = \frac{\lambda^2}{24\pi k T}.$$

D'où

$$I = \frac{4 n_2 e_2^2 \lambda E}{3\sqrt{2 m_2 \pi k T}} \cos\omega t + \frac{\omega n_2 e_2^2 \lambda^2 E}{3 k T} \sin\omega t. \tag{45}$$

Le premier membre de cette formule représente la formule de mobilité des ions de Langevin [8]. Celle-ci est donc un cas particulier de la *formule* (38) *que l'on peut considérer comme une forme généralisée de la formule de Langevin, dans le cas où l'on a un champ magnétique* **H** *et où* ω *et* **E** *sont quelconques.*

7. Applications diverses. — Pour terminer, nous allons utiliser les résultats précédents au calcul du tenseur de conductivité électrique, du tenseur diélectrique du gaz et du coefficient de Hall [4].

a. Tenseur de conductivité. — Utilisons la formule (31) en prenant des axes tels que **E** et **H** aient respectivement les composantes (E_x, E_y, E_z) et (0, 0, H); il vient

$$I_x = \mu J E_x - \mu J' \frac{e_2 H}{m_2} E_y, \tag{46}$$

$$I_y = \mu J' \frac{e_2 H}{m_2} E_x + \mu J E_y, \tag{47}$$

$$I_z = \mu J E_z. \tag{48}$$

Le tenseur de conductivité étant défini par la relation

$$I_\mu = \sum_\nu \sigma_{\mu\nu} E_\nu,$$

ses composantes ont pour expression :

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \mu J, \\ & \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\mu J' \frac{e_2 H}{m_2}, \\ & \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0, \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

où J et J' sont définis par (32) et (33).

b. Tenseur diélectrique. — Il est défini par la relation

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \text{et} \quad D_\mu = \sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu} E_\nu.$$

avec $\mathbf{I} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}$.

Les composantes $\varepsilon_{\mu\nu}$ se calculent immédiatement à partir de (46); on a

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 1 + 4\pi\mu \left(\frac{K_1}{\omega} \sin\omega t - K_2 \cos\omega t \right), \\ & \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -4\pi\mu \left(\frac{K'_1}{\omega} \sin\omega t + 2 K'_2 \cos\omega t \right) \frac{e_2 H}{m_2}, \\ & \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

c. Coefficient de Hall. — Pour l'obtenir, supposons que $E_z = 0$, d'où $I_z = 0$ (**E** et **H** sont perpendiculaires). Faisons tourner les axes de telle sorte que $I_y = 0$; E_y et E_x sont alors liées par la relation

$$E_y = -\frac{J'}{J} \frac{e_2 H}{m_2} E_x.$$

que l'on tire de (47). L'équation (46) devient alors

$$I_x = I = -\mu \frac{(J^2 + s^2 J'^2)}{sJ'} E_y$$

et le coefficient de Hall s'écrit

$$R = \frac{E_y}{I} = -\frac{sJ'}{\mu}\left[\frac{1}{J^2 + s^2 J'^2}\right]. \qquad (51)$$

Dans le cas où $\omega = 0$, on a $J = K_1$ et $J' = K'_1$, d'où :

$$R = -\frac{sK'_1}{\mu}\left[\frac{1}{K_1^2 + s^2 K'^2_1}\right]. \qquad (52)$$

Nous appliquerons ce résultat au cas particulier où $f_2^{(0)}$ est maxwellien et en supposant que

$$\frac{\nu}{s} \gg 1 \qquad \left(\text{avec } \nu = \frac{v_2}{\lambda}\right).$$

Il vient, en négligeant les termes en Γ_2^2 :

$$K_1 = \frac{1}{6kT}\int_0^\infty v_2^5 f_2^{(0)} \frac{dv_2}{A},$$

avec

$$A = \frac{v_2^2(1+z)}{\lambda}.$$

Or, avec les hypothèses précédentes, z est négligeable; en effet :

$$z = \frac{e_2^2 H^2 \lambda^2}{m_2^2 v_2^2} \# \frac{s^2}{\nu^2} \ll 1.$$

On a donc :

$$K_1 = \frac{\lambda}{6kT}\int_0^\infty v_2^3 f_2^{(0)}\, dv_2 = \frac{\lambda \bar{v}_2}{24\pi kT},$$

On a de même

$$K'_1 = -\frac{\lambda^2}{6kT}\int_0^\infty v_2^2 f_2^{(0)}\, dv_2 = -\frac{\lambda^2}{24\pi kT}.$$

Il vient alors

$$K_1^2 + s^2 K'^2_1 = \frac{\lambda^2(\bar{v}_2)^2}{(24\pi kT)^2}\left[1 + \frac{s^2\lambda^2}{(\bar{v}_2)^2}\right] \# \frac{\lambda^2(\bar{v}_2)^2}{(24\pi kT)^2},$$

d'où

$$R = \frac{s}{n_2 e_2^2}\,\frac{3kT}{(\bar{v}_2)^2}$$

et, en remarquant que

$$(\bar{v}_2)^2 = \frac{8kT}{\pi m_2},$$

on obtient finalement

$$R = \frac{3\pi}{8} H \frac{1}{n_2 e_2}. \qquad (53)$$

d. Déviation d'un faisceau électronique. — On l'obtient immédiatement en appliquant les formules (38) et (39); la déviation instantanée s'écrit

$$d = \frac{I_y}{I_x} = s \sin\varphi \frac{K'_1 \cos\omega t - 2\omega K'_2 \sin\omega t}{K_1 \cos\omega t + \omega K_2 \sin\omega t},$$

et l'on peut calculer facilement, à partir de cette formule, la déviation moyenne.

8. **Discussion, comparaison avec la méthode des libres parcours moyens et conclusion.** — Cette méthode développée en particulier par Townsend et L. G. H. Huxley [9] consiste à calculer le déplacement subi par l'électron sous l'influence du champ, durant l'intervalle compris entre deux chocs successifs. Le déplacement moyen d'un ensemble d'électrons par unité de temps fournit la vitesse de diffusion des électrons à travers le gaz. D'une manière générale, on suppose toujours que l'intensité du champ est faible; en outre, on effectue le calcul en admettant d'abord que les électrons ont tous la même vitesse, puis on prend la valeur moyenne du résultat avec une fonction de répartition des vitesses électroniques.

En raison de sa nature même, cette méthode présente l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à des champs faibles, sans qu'il soit possible de préciser d'une manière rigoureuse la validité et l'ordre de grandeur des approximations mises en jeu en vertu de cette hypothèse.

D'autre part, le fait de décomposer le calcul, en considérant d'abord la vitesse des électrons comme constante, conduit à prendre les valeurs moyennes par rapport à la direction de la vitesse indépendamment de la valeur absolue de celle-ci; méthode qui nous semble contestable du fait que le gaz ionisé, soumis à un champ magnétique constant, se comporte comme un milieu anisotrope. Cette méthode conduit à la formule

$$w_2 = \frac{2}{3}\,\frac{e_2 E}{m_2}\,\frac{\lambda}{v_2}$$

pour la vitesse de diffusion en présence d'un champ électrique constant (avec $H = 0$). Huxley semble attacher une grande importance à ce facteur $\frac{2}{3}$, bien qu'il ne précise pas la nature de la fonction de distribution qui détermine v_2. Nous allons voir que nous sommes conduits à remplacer ce facteur par $\frac{8}{3\pi}$, dans le cas d'une distribution maxwellienne.

Remarquons, en outre, que les expressions moyennes, données par cet auteur dans ses derniers articles, n'ont de sens que si l'on connaît la fréquence de chocs ν en fonction de la vitesse v_2, ainsi que la fonction de distribution des vitesses; sans cette précision, il est impossible d'évaluer les grandeurs moyennes qui déterminent la vitesse de diffusion.

Afin de faciliter la comparaison de ces formules basées sur la notion du libre parcours moyen avec

celles obtenues à partir de l'équation de Boltzmann, nous traiterons deux cas particuliers :

a. Cas où $H = 0$, $\omega = 0$. — Nous supposerons de plus que Γ_2^2 est négligeable, ce qui revient à supposer que l'intensité du champ $\mathbf{E}$ est suffisamment faible. Dans ce cas, nous avons déjà vu que $f_2^{(0)}$ est maxwellien et que

$$K_1 = \frac{\lambda}{6kT}\int_0^\infty v_2^3 f_2^{(0)}\,dv_2 = \frac{\lambda \bar{v}_2}{24\pi kT} = \frac{\lambda \bar{v}_2}{8\pi m_2 \overline{v_2^2}}.$$

On a donc

$$\mathbf{I} = \frac{8\pi n_2 e_2^2 \lambda \bar{v}_2}{8\pi m_2 \overline{v_2^2}}\mathbf{E}$$

et comme

$$\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}\,\bar{v}_2$$

dans le cas d'une répartition maxwellienne, il vient

$$\mathbf{I} = (n_2 e_2)\frac{8}{3\pi}\frac{e_2\mathbf{E}}{m_2}\frac{\lambda}{\bar{v}_2}, \tag{54}$$

d'où pour la vitesse de diffusion

$$\mathbf{w}_2 = \frac{8}{3\pi}\frac{e_2\mathbf{E}}{m_2}\frac{\lambda}{\bar{v}_2}. \tag{55}$$

On voit bien que, dans ce cas, le coefficient $\frac{2}{3}$ est remplacé par $\frac{8}{3\pi}$.

b. Cas où ν est indépendant de v_2. — Nous appliquerons la formule générale (44) à deux cas :

1° $H = 0$ et $\omega = 0$; on a dans ce cas

$$s = 0 \quad \text{et} \quad g(\nu) = \nu^2, \quad \text{d'où} \quad K_1 = \frac{1}{8\pi m_2 \nu};$$

il vient donc

$$\mathbf{I} = (n_2 e_2)\frac{e_2\mathbf{E}}{m_2}\frac{1}{\nu},$$

formule du même type que (54) avec un coefficient égal à 1. Il faut cependant remarquer que, dans ce cas, la « température électronique » peut être différente de T, car on ne fait alors aucune hypothèse sur l'intensité $\mathbf{E}$.

2° $\omega = 0$ et $s \neq 0$. On a alors

$$g(\nu) = \nu^2 + s^2,$$

d'où

$$K_1 = \frac{\nu}{8\pi m_2(\nu^2 + s^2)} \quad \text{et} \quad K'_1 = -\frac{1}{8\pi m_2}\frac{1}{\nu^2 + s^2}.$$

En appliquant simultanément les formules (38) et (39), on obtient

$$I_x = (n_2 e_2)\frac{e_2 E}{m_2}\frac{\nu}{\nu^2 + s^2}, \tag{56}$$

$$I_y = -(n_2 e_2)\frac{e_2 E}{m_2}\frac{s \sin\varphi}{\nu^2 + s^2}. \tag{57}$$

On constate que ces deux résultats sont équivalents à ceux établis primitivement par Townsend : cela s'explique aisément en remarquant que Townsend supposait que la vitesse v_2 était la même pour tous les électrons et que λ était indépendant de v_2, de sorte que $\nu = \frac{v_2}{\lambda}$ ne dépendait pas de v_2. Mais il faut remarquer, comme précédemment, que ces formules peuvent être valables pour des « températures électroniques » différentes de T.

En résumé, il nous semble que la méthode de l'équation de Boltzmann, outre sa plus grande rigueur, conduit à des résultats plus généraux et sur lesquels il est plus aisé de pratiquer des approximations ayant un sens physique précis.

Manuscrit reçu le 5 mai 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Boltzmann L. — Vorlesungen über Gastheorie (1895).
[2] Hilbert D. — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1912).
[3] Chapman et Cowling. — The mathematical theory of non-uniform gases (1939).
[4] Jancel R. et Kahan T. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 788-790 et 1478-1481.
[5] Margenau. — *Phys. Rev.*, 1946, **69**, 508.
[6] Druyvesteyn. — *Physica*, 1930, **10**, 61 et 1934, **1**, 1003.
[7] Jancel R. et Kahan T. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 2045-2047.
[8] Langevin P. — *Ann. Chim. Phys.*, 1903, **27**, 317.
[9] Huxley L. G. H. — *Phil. Mag.*, 1937 *a*, **23**, 210; 1937 *b*, **23**, 442 et 1940, **29**, 313; *Proc. Phys. Soc.*, 1951 *b*, **64**, 844.

ÉTUDE DE L'ABSORPTION DES ONDES ULTRASONORES DE 5 MHz DANS LES LIQUIDES ORGANIQUES PAR LA MÉTHODE DES PRESSIONS DE RADIATION

Par S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI et D. SRINIVASAN,
National Physical Laboratory of India, New Delhi, 12.

Sommaire. — L'absorption d'ondes ultrasonores de 5 MHz est mesurée dans 47 liquides par la méthode des pressions de radiations utilisée par Biquard, puis par Fox et Rock, avec de légères modifications. On discute les erreurs inhérentes à la méthode et les précautions à prendre pour les éviter. Les liquides sont classés suivant leur structure moléculaire, d'après le rapport entre les valeurs observée et théorique de leur coefficient d'absorption, en accord avec un classement antérieur de Pinkerton.

1. **Introduction.** — La théorie classique de l'absorption du son dans les liquides proposée par Stokes [1 *a*] et Kirchhoff [1 *b*] et basée sur la viscosité et la conduction thermique ne rend pas compte des valeurs observées [2]. Le désaccord entre celles-ci et les valeurs théoriques est particulièrement grand pour les liquides polyatomiques non associés, comme le sulfure de carbone, le benzène, le tétrachlorure de carbone et beaucoup d'autres liquides organiques. Beaucoup de théories ont été proposées pour expliquer cet excès d'absorption, la dernière étant la théorie de relaxation proposée d'abord par Herzfeld et Rice [3] pour les gaz et adaptée plus tard au cas des liquides par Kneser [4] et Bauer [5]. Les données expérimentales disponibles actuellement sur l'absorption ne suffisent pas pour imposer l'une des théories proposées pour expliquer les anomalies de l'absorption du son dans les liquides. De plus, aucune comparaison ne peut être établie entre les résultats des différents auteurs, obtenus par des méthodes différentes et à différentes fréquences. Le but du présent article est de fournir des données complètes sur l'absorption du son dans un certain nombre de liquides, données obtenues par la méthode de la pression de radiation, la plus avantageuse à la fréquence utilisée. La méthode des pressions de radiation a été choisie parmi les différentes méthodes de mesure d'absorption comme la plus simple et celle qui exige le moins d'hypothèses pour mener les calculs.

2. **Expériences.** — Nous avons adopté la méthode de Biquard [6], légèrement modifiée. Au lieu de déplacer le détecteur, nous le laissions fixe et déplaçions le cristal. La palette utilisée était un disque creux de laiton de 1 cm de diamètre avec de l'air à l'intérieur et dont les parois ont 0,2 mm d'épaisseur. Il faisait partie d'une balance de torsion à ruban de bronze phosphoreux, protégée par une enceinte pour éviter les courants d'air. La cuve utilisée était en laiton, de forme rectangulaire, de 45 cm de long, 5 de large et 8 de profondeur. Pour éviter la circulation hydrodynamique du liquide, une très fine lame de mica était tenue par une barre de laiton fixée à la cuve à 8 cm d'une des faces. Le cristal était fixé à la cuve d'un côté

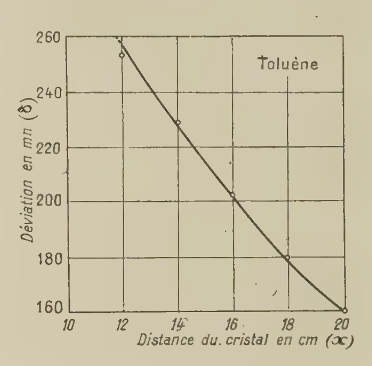


Fig. 1.

de l'écran de mica et la palette était plongée dans le liquide de l'autre côté. Le réservoir portant le cristal, était mobile sur deux rails qui permettaient de le déplacer parallèlement à sa longueur. Un dispositif permettait, en outre, les déplacements verticaux.

Les rotations de la palette, qui portait un miroir, étaient mesurées par deux méthodes : soit en tournant le bouton du support du fil de torsion de façon à ramener le spot sur l'échelle à la position qu'il occupe en l'absence d'irradiation ultrasonore, et mesurant l'angle sur un cercle gradué au moyen d'un vernier, à 1 mn près, soit en mesurant directement la déviation du spot réfléchi. Les deux méthodes donnent les mêmes résultats si la déviation reste faible, et comme la seconde est plus aisée et rapide, nous l'avons choisie pour nos mesures d'absorption.

Les rotations de la palette, données par les déplacements du spot sur l'échelle, étaient mesurées à différentes distances. On traçait ensuite le graphique donnant le logarithme de l'intensité (qui est proportionnelle à la déviation) en fonction de la distance. La pente de la droite obtenue donne le coefficient d'absorption. La déviation était mesurée trois fois pour chaque distance de la palette au cristal et l'on prenait la moyenne. Chaque liquide était distillé deux fois avant l'expérience.

3. **Causes d'erreurs et corrections.** — La méthode de mesure de l'absorption par la pression de radiation comporte plusieurs causes d'erreur. Nous prenions soin de les éliminer le mieux possible. Les principales étaient :

a. La divergence du faisceau sonore. — Ce problème a été entièrement traité par Pinkerton [7]. Suivant un raisonnement bien connu utilisant les zones de Fresnel, les effets de diffraction deviennent importants lorsque la distance axiale est inférieure à $x = \frac{R^2}{\lambda}$, où R est le rayon du cristal et λ la longueur d'onde dans le milieu. Tout point situé dans ces conditions est dit être dans la région de Fresnel et tout point situé au delà est dit dans la région de Fraunhoffer. Au delà de x, le faisceau commence à diverger et il faut, par une correction, tenir compte de cette divergence. La limite entre les deux a été trouvée expérimentalement par Pinkerton à la distance $\frac{R^2}{2\lambda}$ au lieu de $\frac{R^2}{\lambda}$ donné par la théorie.

Dans notre expérience, le rayon du cristal, qui avait une section de 1 pouce carré, est de 1,25 cm. La longueur d'onde la plus grande pour 5 MHz étant 0,03 cm dans le cas de l'aniline, $\frac{R^2}{2\lambda}$ se trouve être de 26 cm. Toutes nos mesures se rapportent à des régions situées bien en deçà de cette distance, et nous n'avons par la suite pas eu à faire de correction de divergence.

b. Diffraction du faisceau. — Le problème est traité dans un article de Willard [8]. Le degré de distorsion du faisceau est estimé en calculant la fonction

$$S = \left(\frac{2t^2\nu}{Zv}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où t est le plus petit diamètre de la section droite du faisceau (et de l'émetteur), Z la distance comptée normalement à la source, v la vitesse du son dans le milieu et ν la fréquence. Cette formule dérive de la théorie de Fresnel appliquée à la diffraction de la lumière par une fente mince infiniment longue [9] en supposant la source à distance infinie de la fente qui est alors considérée comme un émetteur d'ondes planes parallèles. La valeur de la fonction nous donne seulement un ordre de grandeur de l'effet de diffraction du son qui modifie les mesures d'absorption pour des dimensions données de l'appareil. Willard [8] a donné une série de diagrammes reliant le rapport d'énergie $E = \frac{L}{L_0}$ et la distance $x_1 = \frac{x_0}{t}$ pour différentes valeurs de s où L_0 est l'énergie uniforme rayonnée et x la distance du point d'observation à l'axe normal à la source en son centre. Il résulte du diagramme que, lorsque s croît, la divergence du faisceau diminue et de plus grandes fluctuations se produisent dans le faisceau. Lorsque s est très grand, les fluctuations dans le faisceau deviennent

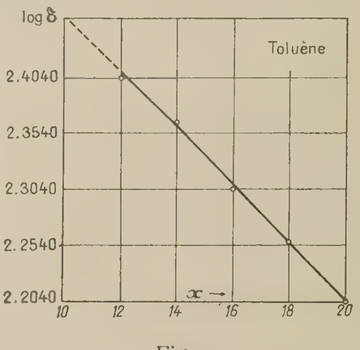


Fig. 2.

négligeables. Si l'on emploie un détecteur de plus grand diamètre que l'émetteur, l'intensité mesurée donnera la résultante de ce qui correspond à toute la figure de diffraction. Si le détecteur est sensible à la pression de Rayleigh, il ne sera pas sensible à la phase et la résultante se réduit à la somme arithmétique des intensités en tous les points. Les valeurs trouvées pour l'absorption ne seront pas affectées dans ce cas d'erreurs dues à la diffraction. Si l'on emploie un détecteur de rayon plus petit que le cristal source, les erreurs de diffraction interviennent, mais si s devient grand, elles sont négligeables. Plus le détecteur employé est petit, plus on doit veiller, pour éviter les erreurs de diffraction, à se placer dans des conditions où s est aussi grand que possible. Dans nos mesures, le détecteur a 1 cm de diamètre et est donc plus petit que le cristal qui a une surface de 2,5 cm². Nous ne prenons pas un détecteur plus grand, car cela aurait diminué la sensibilité de l'appareil, et accru la possibilité de formation d'ondes stationnaires. Ayant ainsi préféré un petit détecteur, il nous a fallu, pour diminuer les erreurs de diffraction, choisir les constantes de l'appareil de façon à augmenter s. Elles étaient, par exemple, les suivantes :

$$t = 2,5 \text{ cm}, \qquad \nu = 5 \text{ MHz},$$

valeur maximum de Z, 15 cm, et vitesse maximum de propagation, dans le cas de l'aniline, $1682 \cdot 10^5$ cm/s,

ce qui donne $s = 5$. D'après le diagramme de Willard [8], il est clair que, pour cette valeur, les fluctuations dans le faisceau sont très faibles.

En fait, nous avons mesuré les intensités en différents points du faisceau et nous avons trouvé, compte tenu de l'absorption vraie, qu'ils concordent à moins de 10 pour 100 près, avec une erreur expérimentale inférieure à 1 pour 100. Nous pouvons donc prévoir avec notre méthode, une erreur maximum de 10 pour 100 par effet de diffraction.

c. *Cavitation.* — Elle produit dans le faisceau sonore des fluctuations qui rendent impossible la mesure de la véritable décroissance due à l'absorption. Richards [10], d'après Boyle, Taylor et Froman [11], remarque que la cavitation apparaît, dans les liquides, pour une intensité d'environ 0,03 W/cm² dans le domaine des ultrasons. Dans nos mesures, l'intensité ne dépassant pas 0,01 W/cm², nous assurait l'absence de cavitation.

d. *Courant hydrodynamique de liquide.* — Le courant provenant de la source sonore est une sérieuse source d'erreur dans les mesures d'absorption. La pression qu'il exerce peut être plus grande que la pression de radiation. On évite cette erreur en plaçant devant le détecteur une feuille mince de collodion ou de substance analogue. La position de cette feuille est très importante, car, pour les mesures faites au voisinage du cristal, la position de la feuille modifie les lectures. Fox et Rock [12] ont mesuré cet effet, et trouvé qu'à distance suffisamment grande du cristal, la position de l'écran n'influe pas sur les déviations. Dans notre appareil, nous avons employé une feuille de mica et étudié l'influence de sa position pour quatre liquides. Nous avons constaté qu'à plus de 8 cm du cristal, les variations de la position de l'écran n'avaient plus d'effet; nous avons donc fixé le support du mica au réservoir à environ 8 cm du cristal, et mesuré les déviations pour des distances supérieures.

e. Une autre source d'erreurs provient de la réflexion des ondes sonores. Dans nos mesures pour le liquide le moins absorbant (cas de l'acétone), l'intensité après réflexion s'est trouvée négligeable. L'intensité initiale a été choisie de manière que les ondes s'amortissent avant d'atteindre la paroi opposée du bassin, ce qui supprime toute possibilité de réflexion.

f. *Ondes stationnaires.* — Pour éviter la formation d'ondes stationnaires, le détecteur était toujours légèrement incliné sur la normale à la source.

g. *Tension superficielle.* — Il faut se préoccuper de l'erreur due à la tension superficielle. S'il se forme un film à la surface du liquide, le zéro (position d'équilibre de la balance de torsion) varie. Pour l'éviter, nous n'utilisions chaque liquide que pendant un temps court, insuffisant pour la formation du film, ce dont on s'assurait en vérifiant le zéro de la balance de torsion pour différentes positions. Il restait constant, ce qui montrait l'absence d'erreur due à la tension superficielle.

h. *Influence du diamètre de la palette.* — La théorie suppose le diamètre du disque grand par rapport aux longueurs d'onde (*voir* Hartmann [13]). Dans ses expériences, Hartmann trouve qu'il suffit d'un diamètre cinq à six fois plus grand que la longueur d'onde. Dans les nôtres, la plus grande longueur d'onde, dans le cas de l'aniline, atteignait 0,034 cm. Le diamètre du disque était 1 cm, soit environ 30 longueurs d'onde. La condition indiquée était donc satisfaite.

i. La théorie exige que la radiation soit complètement réfléchie par la surface du disque, condition que nous avons réalisée en ménageant une couche d'air à l'intérieur du disque.

4. **Résultats**. — Les liquides classés en groupes différents, sont indiqués dans la première colonne du tableau I. La seconde colonne donne la température de l'expérience. Les mesures de vitesse ont été faites dans notre laboratoire [17], à la même température que les mesures d'absorption, par la méthode de la diffraction lumineuse. Les valeurs des vitesses figurent dans la colonne 4. La densité de chaque liquide, déterminée au laboratoire même, à la température des expériences d'absorption et de vitesse, figure dans la colonne 3. Les valeurs des viscosités ont été tirées des *International Critical Tables*, et ramenées à la température des expériences. Pour les liquides dont la viscosité ne figure pas dans les *I. C. T.*, elles ont été déterminées par la méthode de la bulle d'Ostwald, à la température des expériences. Les viscosités figurent dans la colonne 5. Le rapport du coefficient d'absorption observé au carré de la fréquence $\frac{\alpha}{\nu^2}$ est donné colonne 6. Le rapport de cette valeur observée de $\frac{\alpha}{\nu^2}$ à celle calculée par la formule de Stokes-Kirchhoff est donnée, pour les liquides pour lesquelles les données complètes nécessaires sont accessibles, dans la colonne 7. Enfin, valeurs de $\frac{\alpha}{\nu^2}$ obtenues pour les mêmes liquides par d'autres expérimentateurs utilisant des méthodes différentes sont données, pour comparaison, dans la colonne 8.

5. **Discussion**. — On remarquera que pour certains liquides, nos valeurs de $\frac{\alpha}{\nu^2}$ diffèrent beaucoup de celles données par nos prédécesseurs, qui, d'ailleurs, diffèrent entre elles. La méthode de diffraction lumineuse ne peut servir qu'à des mesures qualitatives, comme l'a montré Parthasarathy [14];

Tableau I.

Valeurs du coefficient d'absorption du son dans les liquides à 5 MH₂.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
			Hydrocarbures.				
1. Benzène	20	0,87	1,326	7,0	8,08	120	8,0 (PG), 22° 8,67 (B), 23° 8,3 (W), 23° 8,53 (PB), 17°
2. Toluène	30	0,8631	1,320	5,8	1,23	15,8	0,9 (W), 23° 0,83 (B), 20°
3. *m*-Xylène	30	0,8612	1,293	5,5	0,89	11,0	0,63 (B), 0,64 (P), 23–28° 0,78 (W), 23° 0,51 (P), 23–28°
4. *p*-Cymène	23	–	–	–	1,51	–	–
5. Dipentène	23	0,864	1,328	–	4,64	–	–
6. Cyclohexane	25	0,811	1,284	9,6	4,58	28	–
			Cétones.				
7. Acétone	18	0,790	1,192	3,0	0,37	6,2	0,22 (B), 18° 0,64 (W), 23°
8. Méthyléthylcétone	23	0,805	1,207	4,17	0,33	4,20	–
9. Cyclohexanone	23	0,9491	1,449	23	0,59	2,65	–
10. Acétophénone	25	1,012	1,496	16,7	1,89	14,1	–
			Composés substitués.				
11. Chlorobenzène	20	1,101	1,291	7,99	0,99	11	1,35 (Pi) 23–28°
12. Bromobenzène	20	1,470	1,170	1,17	2,02	23,7	–
13. Nitrobenzène	30	1,199	1,490	16,82	0,99	7	0,90 (W), 23–27°
14. *o*-Nitrotoluène	23	1,16	1,432	23,70	3,36	19,40	–
15. *m*-Nitrotoluène	24	1,154	1,489	23,3	1,85	10	–
16. *o*-Chlorotoluène	21	1,085	1,344	–	2,38	–	
17. *p*-Chlorotoluène	21	1,066	1,316	–	2,41	–	–
			Autres liquides.				
18. Tétrachlorure de carbone	20	1,595	0,938	10,0	5,86	30	5,85 (PB), 25° 5,7 (W), 23–27° 5,33 (PG), 23°,5 5,75 (Buss), 2°,3
19. Aniline	24	1,018	1,638	37,1	6,45	21,5	–
20. Sulfure de carbone	20	1,260	1,149	3,5	77	1571	74 (W), 23–27° 59 (PB), 18°
21. Pyridine	25	0,982	1,400	9,45	5,2	58	–
22. α-Picaline	25	0,951	1,453	7,95	1,26	15,4	–
23. Benzaldéhyde	25	1,047	1,479	14,0	2,07	19,0	–
24. Eau bidistillée	23	1,000	1,494	10	0,312	3,90	0,25 (B) 0,33 (W), 23–27° 0,253 (Pi), 23° 0,41 (Buss), 14–16° 0,39 (Rufer), 18°
25. Dioxane	21	1,03	1,380	–	1,535	–	1,3 (W), 23–27°

Tableau I (*suite*).

1.	2.	3.	4	5.	6.	7.	8.
			Esters.				
26. Acétate de méthyle	20,5	0,773	1,211	3,95	1,21	16,0	1,56 (B), 19°
							1,11 (P), 23 28°
27. Acétate d'éthyle	23	0,90	1,187	4,2	1,90	23,8	1,36 (P), 23-28°
							2,15 (BS), 20°
							1,1 (W), 23-27°
							0,86 (B), 20°
28. *n*-Acétate de butyle	25	0,871	1,271	7,32	1,94	19,4	–
29. Acétate d'amyle	25	0.867	1,200	8,11	2,34	16,50	1,7 (P), 23-28°
30. Butyrate d'éthyle	25	0,877	1,171	6,68	2,80	23,0	–
31. Oxalate d'éthyle	23	1,053	1,291	17,6	1,10	5,4	–
32. Diéthylmalonate	25	1,055	1,386	18,8	3,68	17,40	–
33. Diéthylphtalate	25	1,130	1,471	101	4,51	6,10	–
34. Salicylate de méthyle	23	1,150	1,360	28,62	7,71	34,0	–
35. Acétoacétate d'éthyle	24	1,025	1,341	17,0	2,90	16,0	–
36. Benzoate d'éthyle	22	1,045	1,388	22,40	3,09	14,6	–
			Alcools.				
37. Alcool méthylique	20	0,792	1,123	5,5	0,30	2,3	0,37 (PG), 19°
38. » isopropylique	23	0,786	1,170	22,20	0,92	2,0	–
39. » *n*-butylique	23	0,810	1,268	29,47	1,94	2,3	1,07 (PG), 20°
40. » isobutylique	23	0,802	1,222	39,70	2,49	3,3	–
41. » isoamylique	23	0,777	1,241	38,63	2,30	3,3	–
42. Huile de fusel (alcool amylique).	27	0,800	1,294	–	1,93	–	1,7 (P), 23-28°
43. Alcool caprylique	23	0,796	1,341	–	2,07	–	–
44. » *n*-octylique	23	0,809	1,358	72,0	4,68	4,4	–
45. Éthylèneglycol	24	1,08	1,616	174	2,69	3,20	–
46. Cyclohexanol	30	0,962	1,428	203	4,89	1,02	5,0 (W), 23-27°
47. Alcool benzylique	23	1,018	1,540	50,54	1,59	4,30	–

Liste des auteurs cités colonne 8.

[B] P. Biquard [6].
[W] G. W. Willard [8].
[P] S. Parthasarathy [14].
[PG] J. R. Pellam et J. K. Galt, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1946, **21**, 8.
[PB] P. Bazulin, *Zurnal eksper. i teoret. Fiziki. U. R. S. S.*, 1938, **8**, 457.
[Pi] J. M. M. Pinkerton, *Nature*, 1947, **160**, 128.
[Buss] W. Buss, *Ann. Physik*, 1938, **5**, 33 et 143.
[Rufer] W. Rufer, *Ann. Physik*, 1942, **41**, 301.
[B. S.] R. T. Beyer et M. C. Smith, *J. Amer. Soc. Acoust.*, 1946, **18**, 424.

elle est incapable, à cause de diverses causes d'erreur, de donner des valeurs exactes, ce qui explique les différences. Kittel [15] a essayé de classer les liquides suivant leur absorption pour les ondes ultrasonores. Une classification plus étendue a été proposée par Pinkerton [16], basée sur deux critères :

a. Le rapport de l'absorption observée à l'absorption classique;

b. Le coefficient de température de l'absorption.

Il a ainsi réparti les liquides purs en quatre groupes :

1° Anormaux (AI), contenant les liquides polyatomiques non associés, comme le sulfure de carbone, le benzène, etc.;

2° Anormaux (AII), contenant les liquides polyatomiques associés, comme l'eau et les alcools;

3° Normaux (NI) contenant les liquides monoatomiques comme l'hélium et le mercure;

4° Normaux (NII) pour les liquides polyatomiques associés très visqueux, comme la glycérine et le cyclohexanol.

Une étude de la colonne 7 du tableau I donne plus de poids à la classification de Pinkerton. Tous les alcools et l'eau forment un même groupe, pour

lequel $\frac{\alpha_{obs}}{\alpha_{calc}}$ est compris entre 2 et 4,4, à l'exception du cyclohexanol avec 1,02. Ce dernier liquide, dont la grande viscosité est le caractère prédominant, figure dans le 4e groupe indiqué précédemment. Tous les carbures d'hydrogène, dérivés substitués et esters figurent dans le 1er groupe, celui des liquides polyatomiques non associés. Les cétones montrent généralement une faible valeur pour le rapport $\frac{\alpha_{obs}}{\alpha_{calc}}$, comprise entre 2 et 6, à l'exception de l'acétophénone. Pour la pyridine, le rapport est plus grand encore que pour le tétrachlorure de carbone; il est probable que la pyridine montre, comme le benzène, une absorption anormale. Il est frappant de constater que tous les esters figurent dans un même groupe, avec des valeurs de $\frac{\alpha_{obs}}{\alpha_{calc}}$ allant de 14 à 23, à l'exception du salicylate de méthyle pour lequel il est de 34, et de l'oxalate d'éthyle avec 5,4, le premier se plaçant avec le tétrachlorure de carbone dans le groupe des liquides très anormaux.

Dans l'ensemble, à la fréquence de 5 MHz, les liquides figurant dans le tableau I entrent dans la classification de Pinkerton des liquides purs, groupés d'après le rapport de la valeur observée de leur coefficient d'absorption à celle calculée par la théorie classique.

Manuscrit reçu le 24 décembre 1952.

BIBLIOGRAPHIE.

[1 *a*] STOKES G. G. — *Camb. Phil. Trans.*, 1845, **8**, 287.
[1 *b*] KIRCHHOFF G. G. — *Pyg. Ann.*, 1868, **134**, 177.
[2] BERGMANN L. — Der Ultraschall, 1949.
HIEDEMANN E. — Der Ultraschallforschung, 1939.
MARKHAM, BEYER et LINDSAY R. B. — Sound absorption in fluids. *Rev. Mod. Physics*, oct. 1951.
SETTE D. — *Nuovo Cimento*, 1949, **6**, 1.
[3] HERZFELD K. F. et RICE F. C. — *Phys. Rev.*, 1928, **31**, 691.
[4] KNESER H. O. — *Ann. Physik*, 1938, **32**, 277.
[5] BAUER E. — *Proc. Phys. Soc.*, 1949, **62**, 141.
[6] BIQUARD P. — Coefficients d'absorption des ultrasons par différents liquides. *Thèse de Doctorat*, Paris, 1935.
[7] PINKERTON J. M. M. — *Proc. Phys. Soc.*, mai 1949, **62**.
[8] GERALD W. WILLARD. — *J. Amer. Soc. Acoust.*, 1941, **12**, 438.
[9] Drude's Theory of Optics, traduit par C. R. MANN et R. A. MILLIKAN (Longmans, Green and Co), chap. I, IV, § 5, 1922.
[10] RICHARDS W. T. — *Rev. Mod. Physics*, 1939, **11**, 36.
[11] BOYLE R. W., TAYLOR G. B. et FROMAN D. K. — *Trans. Roy. Soc. Canada*, 1929, **23**, 187.
[12] FOX F. E. et ROCK G. D. — *J. Amer. Soc. Acoust.*, 1941, **12**, 505.
[13] HARTMANN et MORTENSEN. — *Phil. Mag.*, 1948, **39**, 377.
[14] PARTHASARATHY S. — *Curr. Sc.*, 1938, **6**, 501.
[15] KITTEL C. — *J. Chem. Phys.*, 1946, **14**, 614.
[16] PINKERTON J. M. M. — *Proc. Phys. Soc.*, 1949, **62** B, 129.
[17] PARTHASARATHY S. et BAKHSHI N. N. (à paraître).

ERRATA.

PROPRIETÉS, DOSES DE TOLÉRANCE, ET DOSAGE DES AÉROSOLS PRÉSENTANT UNE RADIOACTIVITE α

Par G. DELIBRIAS et J. LABEYRIE.

(Juin 1953, **14**, 407-408.)

Pages 407, 415, 416, légendes des figures 1, 16, 17, *au lieu de* UO_2, *lire* U_3O_8.

FOCALISATION DES PARTICULES DE GRANDE ÉNERGIE PAR DES LENTILLES A GRILLE

Par M. Y. BERNARD.

(Juillet-Août-Septembre 1953, **14**, 451-458.)

Page 452, figure 17, *au lieu de* grossissement 660, *lire* grossissement 330.

LETTRES A LA RÉDACTION

SOURCE D'IONS A HAUTE FRÉQUENCE SUR GÉNÉRATEUR A NEUTRONS DE 250 kV

Par Jean DE BEAUREGARD,
Ingénieur E. S. E.,
Laboratoire des rayons X.

On sait que la production des neutrons est réalisée notamment par l'impact d'un faisceau d'ions de deutérium sur une cible de Be, de Li ou de D.

La cible de Be nécessite, pour avoir un bon rendement, un faisceau de grande énergie (à partir de 500 kV) et la cible de D, qui a beaucoup le meilleur rendement, est d'une réalisation difficile. Reste la cible de Li, qui donne des neutrons à partir de 100 kV et a un bon débit vers 200 kV.

Le faisceau de deutons est produit par une source où les atomes de D sont ionisés et d'où ils sont extraits pour être dirigés vers les électrodes de focalisation et d'accélération.

On a utilisé le procédé de l'ionisation par des oscillations haute fréquence suivant le dispositif adopté d'abord par Thonemann [1], puis par C. D. Moak, H. Reese et Good [2] : tube de Pyrex (dont le coefficient de recombinaison de surface est très faible : 2.10^{-5}) dans lequel on fait arriver une très faible quantité de D (10 à 25 cm^3/h) soumise à l'action des électrons mis en mouvement rapide par les oscillations haute fréquence amenées par des électrodes convenables.

Nous avons employé, pour avoir une haute fréquence stable, un émetteur piloté par quartz avec deux étages multiplicateurs donnant finalement 100 Mc avec possibilité d'obtenir au maximum 150 W. En réalité, le fonctionnement normal ne nécessite pas plus de 60 W environ, car, au-dessus, l'échauffement de la source devient trop grand.

La haute fréquence est transmise à la source par un système capacitif constitué par deux anneaux coupés (*fig.* 1) reliés à deux spires argentées de 25 mm de diamètre, elles-mêmes couplées inductivement à l'émetteur dont le circuit comporte aussi deux spires de même diamètre.

La consommation en deutérium est très faible (10 à 15 cm^3/h); un débit si faible est difficile à régler et l'on a été amené à employer un osmorégulateur au palladium. C'est un tube de Pd de 3 mm de diamètre, 10 cm de long et 0,5 mm d'épaisseur, scellé dans une ampoule de verre où est amené le deutérium. Le Pd est chauffé indirectement par une hélice résistante placée autour d'un tube de verre entourant lui-même le tube de Pd (*fig.* 2).

La tension d'extraction des ions de la source vers les électrodes d'accélération (qui peut monter à 5 kV), est fournie par un petit redresseur sec constitué par

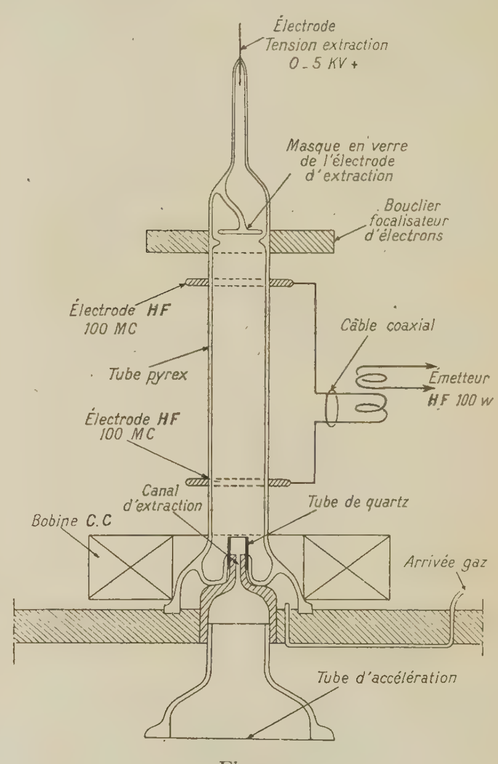


Fig. 1.

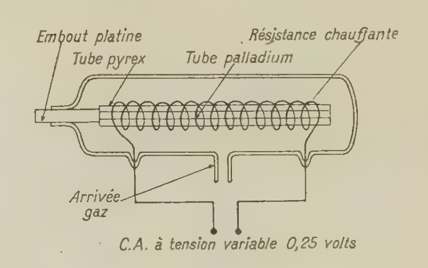


Fig. 2.

des crayons Westalite et des condensateurs montés en doubleurs de tension; le débit est très faible : quelques milliampères (*fig.* 3).

Le fonctionnement de la source est très amélioré à la fois au point de vue rendement en ions atomiques

et débit par l'adjonction autour du canal de sortie (comme cela avait du reste été préconisé dans les Mémoires originaux), d'une bobine à courant continu de quelques milliers d'ampères-tours créant un champ magnétique important parallèle à l'axe de la source. Les ions dont la trajectoire est parallèle à l'axe ne sont pas déviés, mais les autres s'enroulent en hélice autour de l'axe et viennent passer par le canal d'extraction. On arrive ainsi à augmenter considérablement l'intensité du faisceau sortant de la source (4 à 7 fois).

La cible qui reçoit le faisceau est placée à 80 cm de la sortie de la source, et la principale difficulté réside dans la focalisation correcte du faisceau d'ions. Avec les électrodes généralement employées, pour obtenir une focalisation convenable, le rapport entre les tensions d'accélération et d'extraction ne doit pas dépasser 20. Dans notre tube accélérateur, ce rapport

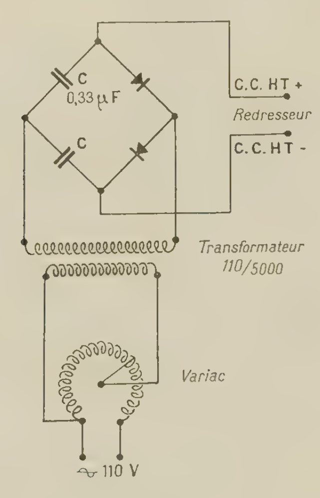


Fig. 3.

est d'environ 50, ce qui a nécessité l'étude de nouvelles électrodes ou une tension accélératrice intermédiaire dont la réalisation est assez délicate. Jusqu'à présent nous avons obtenu un faisceau encore assez diffus de 250 μA avec une accélération de 150 kV.

On se rend compte du fonctionnement normal de la source lorsqu'elle émet une lueur pourpre intense caractérisant la production en forte proportion d'ions atomiques, alors que la lueur des ions moléculaires est rosâtre. La production des ions atomiques s'améliore quand la source a fonctionné un certain temps, et surtout lorsque les parois intérieures sont parfaitement propres. En effet, les moindres traces de matières étrangères déposées sur la paroi intérieure de la source augmentent considérablement le coefficient de recombinaison des ions à la surface du Pyrex.

[1] *Nature*, London, 1946, **158**, 61.
[2] Design and operation of RF ion source for particle accelerator. *Nucleonics*, september 1951.

Manuscrit reçu le 17 juin 1953.

INTERPRÉTATION THÉORIQUE DES COURBES CRYOSCOPIQUES DE SOLUTIONS DANS LES ÉLECTROLYTES FORTS. ESSAI DE GÉNÉRALISATION

Par Georges Petit,
Laboratoire de Physique-Enseignement de la Sorbonne.

Le présent travail a pour but l'interprétation de l'allure des courbes cryoscopiques de solutions dans les électrolytes forts fondus, pour des dilutions qui, quoique élevées, ne sont cependant point limites. La valeur d'extrapolation, pour une molarité nulle du corps dissous, dont la signification est classique, devenant ici un cas particulier.

Nous admettrons évidemment que les lois de Raoult peuvent s'appliquer, c'est-à-dire qu'il ne se dépose pas de cristaux mixtes dans les conditions envisagées et que de plus n'existe aucune particule commune avec le solvant, ce que nous supposerons dans tout ce qui va suivre.

D'une façon générale existe une discordance entre un effet osmotique réel E_r et un effet osmotique théorique $E\theta$ calculé en appliquant la règle d'additivité

$$E_r = E_\theta(\alpha, \Phi),$$

où α représente un facteur particulaire et Φ l'activité de Debye et Hückel [1].

La coexistence de deux facteurs, l'un comptant les particules, l'autre détectant leur interaction empêche toute interprétation des résultats sauf dans des cas limites, par exemple à la limite de dilution ou, pour les électrolytes faibles en solution diluée ($\Phi = 1$).

Il est donc particulièrement important de pouvoir les dissocier de façon à obtenir une interprétation simplifiée des courbes pour une molarité appréciable en corps dissous, permettant de déduire un état de la solution. Or, une telle discrimination est possible, l'expérience a montré qu'un électrolyte fort, le plus souvent binaire, dissous dans un solvant à force ionique élevée, donne tout au moins pour des dilutions au voisinage de la limite mais finies, des solutions pratiquement idéales. (Muller [2], Zarzycki [3], Petit [1], Rolin [7] parfois même jusqu'à l'eutectique : Doucet [4]).

Cela signifie que les interactions ioniques étant sensiblement égales, surtout en solution diluée, l'interaction entre les particules dissoutes devient *indiscernable* au sein du solvant. La courbe cryoscopique est une horizontale ($\Phi = 1$) à toute molarité.

Dans le cas général, dans un tel solvant, les courbes décroissent fréquemment traduisant une activité d'un autre type dont le sens physique est devenu plus simple à interpréter. Le seul facteur correctif reste le « facteur d'Arrhénius » : α.

Si nous admettons que les types fondamentaux d'interaction correspondent aux types fondamentaux de liaisons, alors tout corps dissous dans un électrolyte fort ne pourra présenter qu'une interaction covalentielle prise dans son sens le plus large, c'est-à-dire par électrons σ, l'interaction chimique : c'est-à-dire semi-polaire, de coordinance, de covalence, et métal-

lique, si nous la considérons comme un cas extrême de la liaison chimique.

Si nous admettons, en outre, qu'à toute interaction correspond la création effective d'une liaison, alors la théorie d'Arrhénius redevient exacte, l'inhibition de l'effet Debye et Hückel rend ces solutions comparables aux solutions d'électrolytes faibles en solutions diluées. L'horizontalité de nombreuses courbes cryoscopiques indique une application rigoureuse de la loi de Raoult pour des molarités non limites. Donc, l'affaissement indique, lorsqu'il se produit, que l'activité covalentielle est une pseudo-activité traduisant simplement un regroupement des particules étrangères au solvant, produites, soit par le corps dissous seul, soit par union avec des particules du solvant. La solution est idéale en ce sens que les propriétés osmotiques sont pour toutes molarités proportionnelles à la concentration en particules étrangères au solvant, la variation avec la molarité traduisant l'évolution d'équilibres par la seule action de masse.

La courbe cryoscopique doit donc donner directement le coefficient de dissociation et les paramètres qui en dérivent.

Cette théorie peut seule expliquer, non seulement l'horizontalité de certaines courbes cryoscopiques, mais encore l'existence de portions de courbes pratiquement horizontales pour des valeurs entières inférieures à la valeur limite, révélant ainsi un seul équilibre évolutif et un regroupement quasi total pour une certaine molarité (Muller [2], Petit [5] et [6]), paliers atteints d'autant plus rapidement que la liaison de covalence est plus forte entre les particules étrangères au solvant, formées dans les conditions de milieu.

C'est ainsi que les oxydes binaires donnent en général des courbes d'autant moins inclinées que le métal est plus positif [5], [6], [7], alors que les fluorures alcalins donnent des horizontales [3], [7]. L'absence de palier, pour une molécule complexe s'explique par la présence d'équilibres simultanés contribuant de façon comparable au regroupement.

Ainsi envisagée cette théorie permet de comprendre certains résultats expérimentaux et de déceler des actions chimiques, ici seules concevables entre le solvant et le corps dissous; c'est ainsi que Zarzycki [3] trouve une horizontale à 10 particules pour la cryolithe : F_3Al, 3FNa dissoute dans le borate de lithium alors que ce même corps dissous dans le chlorure de sodium nous a donné une courbe qui partant de cette valeur maximum s'affaisse régulièrement (travail non publié).

Nous pouvons expliquer cela ainsi : En milieu chloruré ne se produit avec le solvant aucun dérivé susceptible d'entraver le regoupement des tronçons dissous en particules fluométalliques, alors qu'en milieu boraté la présence des ions oxygène détermine au contact des ions métalliques la naissance de particules oxymétalliques bloquant le regroupement. On peut admettre qu'en milieu borate, un fluorure métallique complexe se comporte comme un mélange de fluorure alcalin et d'oxyde métallique en présence d'un excès d'ions oxygène et ceci d'après l'aspect de deux courbes cryoscopiques. L'effet de masse du solvant en déplaçant quantitativement l'équilibre vers un regroupement total, expliquant l'horizontalité.

Le résultat général exposé plus haut montrant l'inhibition de l'effet Debye et Hückel, peut, suivant nous, être généralisé. Nous dirons : Dans un solvant dont l'état liquide est déterminé par des liaisons d'un type donné les liaisons de même type du corps dissous *si elles sont d'énergie voisine*, deviennent en milieu assez dilué, indiscernables, donc sont sans action sur l'effet osmotique, et seules interviennent les liaisons d'un autre type.

Nous pourrons dire encore : La divergence entre les propriétés réelles d'un mixte quelconque et ses propriétés théoriques calculées en appliquant le principe d'additivité, est fonction des interactions non communes aux constituants. Ce qui, suivant nous, doit pouvoir s'appliquer à de nombreuses interprétations de courbes cryoscopiques dans les milieux plus divers convenablement choisis, par exemple en chimie organique.

[1] Petit G. — *Revue générale des Sciences*, 1951, **58**, 324.
[2] Muller. — *Thèse Sc. Phys.*, Paris, 1937.
[3] Zarzycki. — *Thèse Sc. Phys.*, Paris, 1952.
[4] Doucet, Le Duc J. A. et Pannetier G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 1018.
[5] Petit G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 615.
[6] Petit G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 1281.
[7] Robin. — *Thèse Sc. Phys.*, Paris, 1950.

Manuscrit reçu le 12 juin 1953.

SUR LA THÉORIE DU SPECTRE DE MASSE

Par René Reulos,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Quel est le sens profond du nombre sans dimensions $a = \frac{\hbar c}{e^2} = 137{,}0$ ... ? Selon Eddington [1], ce serait un *nombre entier*, il vaudrait donc 137 exactement, et représenterait le *nombre total des degrés de liberté* associés aux 16 fonctions d'onde qui correspondent au problème de l'interaction de deux corpuscules.

Dans sa théorie de l'univers sphérique en expansion, Eddington considère un corpuscule unique, comme étant en interaction avec l'ensemble de l'univers et admet de ce fait que le système de matrices associé à son onde présente un élément de moins, soit 136, ce qui correspondrait physiquement à la perte du degré de liberté relatif à la distance des deux corpuscules. Ainsi, dans tous les problèmes de quantification orbitale (atome d'hydrogène de Somerfeld, structure fine, etc.), on devrait utiliser le nombre 137, tandis que dans les problèmes relatifs à la quantification par moments cinétiques internes (spin), *c'est le nombre* 136 *qu'il faudrait introduire*. Il en résulte pour notre théorie [2] une conclusion qui paraît intéressante. En effet, le quantum de moment cinétique vaut dans le premier cas :

$$s_1 = 137 \frac{e^2}{c}$$

et dans le deuxième cas :

$$s_2 = 68 \frac{e^2}{c}.$$

Le rapport de la masse du proton à celle de l'électron vaut donc, d'après notre théorie :

$$\frac{m_e}{m_p} = 27 \times 68 = 1836$$

et serait *entier*; or ce chiffre coïncide avec la valeur expérimentale de ce rapport, admise actuellement.

Notre première valeur théorique 1859,5 était légèrement trop forte. Il est curieux que le rapport de cette valeur (théorique) à la valeur expérimentale 1836,13. [3] soit égal *à un millionième près*, au rapport d'Eddington 127/136, et que la substitution suggérée par Eddington du nombre 136 au nombre 137 dans le calcul de la masse du proton donne de ce fait et presque exactement la valeur expérimentale. Doit-on y voir une confirmation des idées audacieuses et des raisonnements quelquefois inquiétants de l'éminent astronome ou une coïncidence fortuite assez peu probable mais possible ?

[1] Eddington. — *Proc. Roy. Soc.* A, I, 1928, **121**, 524; II, 1929, **122**, 358; III, 1930, **126**, 696; IV, 1931, **133**, 311; V, 1931, **133**, 605; VI, 1931, **134**, 524; VII, 1932, **138**, 17; *J. Lond. Math. Soc.*, 1931, **7**, 58.
[2] Reulos R. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 346.
[3] *Amer. Sc.*, juillet 1952, **40**, n° 3 : 1,001146 ± 0,000012.

Manuscrit reçu le 23 juin 1953.

LIMITE SUPÉRIEURE DE LA VIE MOYENNE DE L'ÉTAT EXCITÉ 1,33 MeV DU ^{60}Ni

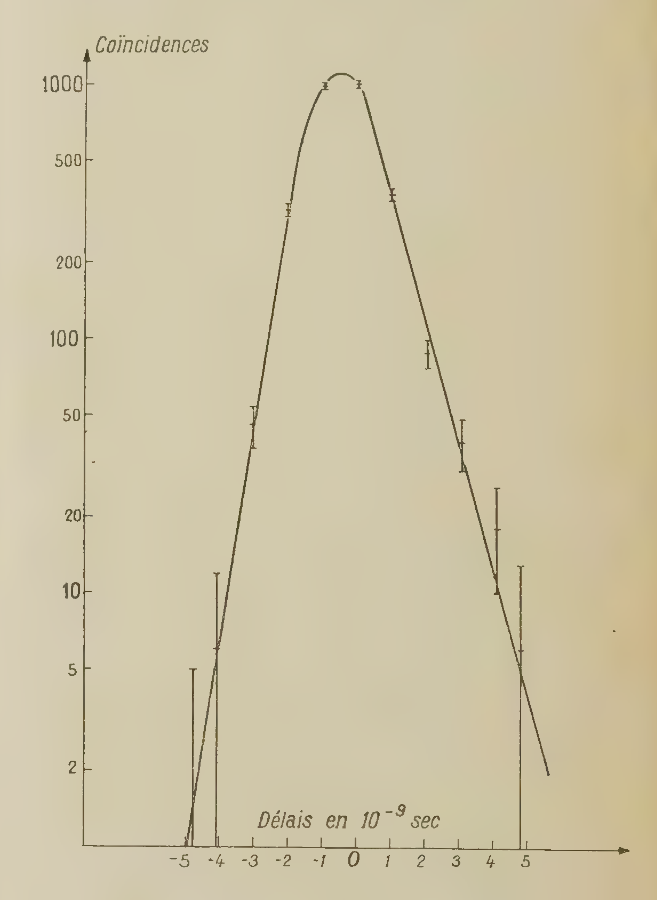
Par S. Gorodetzky, A. Knipper, R. Armbruster et A. Gallmann,
Institut de Recherches Nucléaires, Strasbourg.

Au cours de l'étude sur la vie moyenne de l'état excité à 350 keV de l'Ac C'' [1] par la méthode des coïncidences, on a été amené à étudier comme courbe « prompte » la courbe de coïncidences différées que donnent les deux transitions $\gamma_a = 1{,}17$ MeV, $\gamma_b = 1{,}33$ MeV du ^{60}Ni. On part du niveau fondamental ^{60}Co et l'on passe par transition β au niveau (1,17 + 1,33) MeV du ^{60}Ni, qui par transition γ_a va au niveau 1,33 MeV et enfin par transition γ_b à l'état fondamental du ^{60}Ni.

Nous avons utilisé pour la mesure de la vie moyenne des méthodes inspirées de celles de Bell et Petch [2], [3]. Dans ces méthodes, on compare la courbe de coïncidences relative à la vie moyenne à étudier avec une courbe de coïncidences dite « prompte » dans laquelle on utilise un niveau dont la vie moyenne est nettement inférieure au pouvoir de résolution de l'appareil utilisé.

Nous avons utilisé comme courbe « prompte » la courbe de coïncidences du ^{60}Ni. Nous avons pu ainsi obtenir incidemment une limite supérieure de la période (demi-vie) de l'état excité considéré du ^{60}Ni, limite plus restrictive que les limites supérieures données jusqu'ici. En effet, la dernière valeur de limite supérieure indiquée était de 2.10^{-9} s, limite donnée par Engelder [4]. Auparavant Bell et Petch [2] avaient obtenu une valeur du même ordre de grandeur. Nous obtenons une limite supérieure de $0{,}7.10^{-9}$. Aussi nous a-t-il paru intéressant de signaler ce résultat.

Bien entendu on pourrait s'attendre *a priori* à une vie moyenne inférieure à cette limite. Le niveau excité considéré a le moment angulaire propre 2;



l'état fondamental du ^{60}Ni a le moment angulaire propre 0. La transition est probablement quadrupolaire électrique, *E* [2]. L'application brutale de la formule de Weisskopf [5] donnerait 8.10^{-12} s pour la période de l'état excité.

La méthode utilisée consistait essentiellement à tracer la courbe du nombre de coïncidences obtenues en fonction du délai entre les deux évènements γ_a, γ_b. On intercale suivant la méthode classique entre ces deux événements un délai de temps variable (*fig.*).

Lorsque la période est suffisamment longue par rapport au pouvoir séparateur du dispositif, cette période se déduit immédiatement [6] de la pente de la courbe, les ordonnées étant portées logarithmiquement. Lorsque la période à étudier est très courte vis-à-vis du pouvoir séparateur du dispositif ou encore du même ordre de grandeur que ce pouvoir séparateur, on a une limite supérieure très sûre par simple considération de la pente de la courbe du côté corres-

pondant à l'impulsion retardée. Nous obtenons ainsi dans le cas du ^{60}Ni état excité 1,33 MeV une pente qui correspond à une limite supérieure de la période (demi-vie) de $0,7 . 10^{-9}$ s.

[1] Gorodetzky S, Gallmann A., Knipper A. et Armbruster R. — *C. R. Acad. Sc.*,
[2] Bell R. E. et Petch H. E. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1409.
[3] Bell R. E., Graham R. L. et Petch H. E. — *Canadian J. Research*, 1952, **30**, 35.
[4] Engelder Th. C. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 259.
[5] Blatt J. M. Weisskopf V. H. — *Theoretical Nuclear Physics*, p. 627.
[6] Newton T. D. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 490.

Manuscrit reçu le 24 juin 1953.

MÉTHODE DE FOCALISATION D'UN MONOCHROMATEUR POUR L'ULTRAVIOLET LOINTAIN MUNI DE FENTES FIXES ET DISTANTES

Par Mme Simone Robin,
Laboratoire de Physique-Enseignement (Sorbonne).

Divers procédés de focalisation ont été proposés pour les monochromateurs; cependant aucun, à notre connaissance, ne groupe les avantages suivants : 1° fentes fixes et distantes facilitant la mise en place de la source et des appareils de mesure; 2° rayon monochromatique émergeant de direction pratiquement fixe pour une large étendue spectrale, permettant de placer des appareils récepteurs à une distance importante de la fente de sortie (ceci n'est pas réalisé pour une rotation du réseau le long du cercle de Rowland [1]; 3° absence de toute réflexion (autre que la diffraction par le réseau) évitant ainsi la polarisation de la lumière incidente et les pertes d'intensité dues aux faibles pouvoirs réflecteurs dans cette région spectrale (ceci peut difficilement être réalisé avec le montage du type Eagle [2]); 4° focalisation aussi rigoureuse que possible (ce qui ne peut être réalisé par une simple rotation du réseau autour d'un axe vertical tangent à son sommet [3]).

Nous avons recherché un procédé de focalisation groupant ces divers avantages et susceptible de s'adapter avec peu de modification au monochromateur déjà décrit [4]. Dans la position initiale du réseau, le cercle de Rowland passe par le centre C du réseau la fente d'entrée F_1, la fente de sortie F_2; Px est médiatrice de $\overline{F_1F_2}$ et $\widehat{F_1CP} = \widehat{F_2CP}$; la tache centrale se forme sur la fente F_2 (*fig.* 1). Si nous tournons le réseau d'un angle γ en le déplaçant de $CC' = \Delta x$ suivant Px, le cercle de Rowland ne passe plus par F_1 et F_2 mais coupe $C'F_1$ en B et $C'F_2$ en B'. Posons

$$F_1B = s \quad \text{et} \quad F_2B' = s';$$

$$\widehat{F_1C'P} = \widehat{F_2C'P} = \alpha.$$

D'après la théorie fondamentale des réseaux (*voir*, par exemple, Sawyer [5]), pour que l'image de F_1 se forme sur F_2, il faut :

$$C'F_2 = \frac{R\cos^2\beta}{\frac{s}{R} + \cos\beta} \tag{1}$$

pour

$$s \ll R\cos\beta, \tag{2}$$

R, rayon de courbure du réseau;
$\beta = \alpha - \gamma$, angle de diffraction [nous nous trouvons ici dans des circonstances favorables pour que l'inégalité (2) soit vérifiée dans de larges limites];

d'autre part,

$$C'F_2 = R\cos\beta - s'. \tag{3}$$

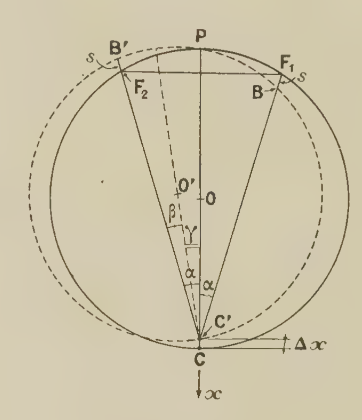


Fig. 1.

De (1) et (3), pour $s \ll R\cos\beta$, on tire :

$$s' = s,$$

ce qui fait apparaître le fait que la distance de l'image au cercle de Rowland est égale à la distance de l'objet à ce cercle.

D'autre part, on voit facilement que si $\Delta x \ll R\cos\alpha$,

$$|s'| = [R\cos(\alpha - \gamma) - R\cos\alpha] + \Delta x\cos\alpha,$$
$$|s| = [R\cos\alpha - R\cos(\alpha + \gamma)] - \Delta x\cos\alpha$$

et si $|s| = |s'|$ dans le cas de la focalisation de F_1 sur F_2, on a

$$\Delta x = R(1 - \cos\gamma) \quad \text{ou} \quad PC' = R\cos\gamma.$$

Le mouvement de focalisation est donc identique à celui du montage autocollimateur pour les fentes objet et image confondues en P et les mêmes procédés de focalisation que ceux déjà proposés pourraient convenir [2], [6].

Un calcul numérique simple montre que pour R = 100 cm, F_1F_2 = 14 cm et un réseau de 570 traits au millimètre, lorsqu'on passe de 0 à 3000 Å dans le premier ordre, Δx varie de 4 mm, le centre de la tache se déplace de 0,3 mm sur le réseau et le rayon monochromatique émergent conserve une direction pratiquement fixe (le déplacement du centre de la tache est inférieur à 0,15 mm dans un plan perpendiculaire au rayon situé à 50 cm de la fente de sortie).

On sait que l'un de ces procédés [2] pour réaliser la focalisation selon une relation du type PC = $R \cos \gamma$ n'est pas facilement réalisable pour les courtes longueurs d'onde; on peut ici songer à cette focalisation par le procédé de Rowland (*fig.* 2) (bras rigide C'D

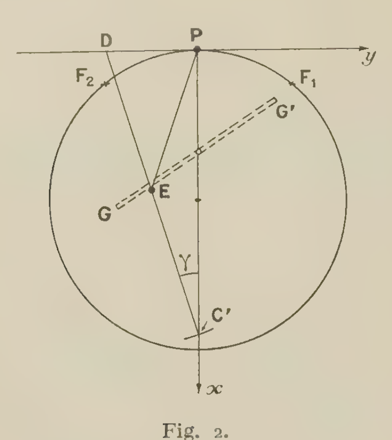


Fig. 2.

de longueur R glissant sur Py et Px), mais il semble préférable d'adopter deux bras articulés en E, PE et EC' de longueur $\frac{R}{2}$, dont l'un C'E est lié au réseau dont il commande la rotation, le mouvement de E étant assuré, par exemple, par une glissière GG' se déplaçant parallèlement à elle-même suivant Px.

[1] Tousey R., Johnson F. S., Richardson J. et Toran N. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1951, **41**, 696.
[2] Robin Mme S. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 247.
[3] Williams F. E. et Parkinson W. W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1949, **39**, 705.
[4] Robin Mme S. et Vodar B. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 634.
[5] Sawyer R. A. — Experimental spectroscopy, New-York, 1946.
[6] Vodar B. — *Rev. Opt.*, 1942, **21**, 97.

Manuscrit reçu le 24 juin 1953.

PHOTOLUMINESCENCE. SUR LE DÉPLACEMENT DU NIVEAU DE FERMI PAR EFFET DE TEMPÉRATURE DANS LES SULFURES PHOSPHORESCENTS A CENTRES POISONS

Par N. Arpiarian,

Laboratoire de Luminescence,
Faculté des Sciences de Paris.

L'étude à la température ordinaire de l'action des poisons Fe, Ni, Co sur le sulfure de zinc activé au cuivre [1] ou à l'argent et excité aux rayons ultraviolets révèle un comportement très différent pour ces substances. Les phénomènes évoqués ici ont été établis sur une gamme très complète de produits de concentrations différentes en poison.

La montée de la luminescence est très rapide pour les sulfures au fer et au nickel, comparable à celle des produits sans poison. Elle est très lente pour les sulfures au cobalt.

La présence de Fe ou de Ni abaisse davantage le rendement de la phosphorescence que celui de la fluorescence. Pour Co, c'est le contraire.

Ces faits s'expliquent, dans le schéma de Riehl-Schön-Klasens, par l'introduction d'un niveau de Fermi [2] situé entre les centres Ni et les centres Co (voir *fig.*). Dans l'état non excité, les centres Fe et Ni sont pleins, les centres Co sont vides.

Pour les premiers, les transitions sans émission (IV) de la bande de conductibilité dans les centres poisons ne peuvent se faire qu'après que le transfert d'activation par migration des trous (III) ait vidé ces centres : d'où montée rapide et déclin rapide.

Pour les seconds, les transitions sans émission (IV) ont lieu tout de suite, puisque les centres Co sont tous vides au départ; pendant le déclin, le nombre des centres Co vides va en décroissant : donc montée lente et déclin lent.

En s'inspirant d'une analogie avec la théorie électronique des semi-conducteurs, on est amené à penser que si l'on abaisse la température, le niveau de Fermi doit nettement s'élever.

L'expérience confirme remarquablement cette pré-

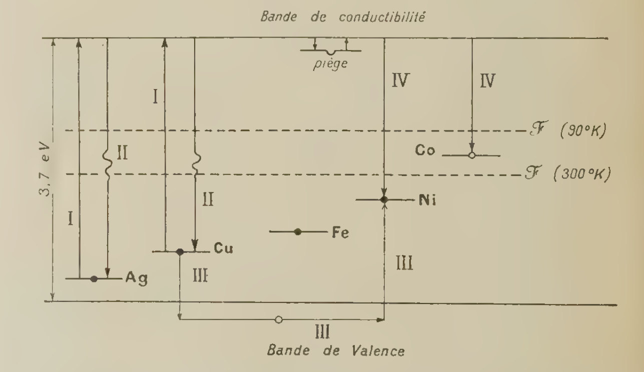


Fig. — Schéma des niveaux électroniques et du mécanisme de l'extinction dans les sulfures phosphorescents à centres poisons.

I, Excitation; II, Transition avec émission de lumière; III, Migration d'un trou; IV, Transition sans émission de lumière; 𝓕, Niveau de Fermi.

Les divers niveaux ont été marqués sur la même figure, mais en réalité il n'y a qu'un activateur et qu'un poison par produit.

vision. A la température de l'azote liquide, le niveau de Fermi s'est élevé à tel point qu'il se trouve au-dessus des centres Co. Ceci correspond à une élévation de l'ordre de l'électron-volt. Les trois poisons ont alors un comportement analogue, celui de Fe et de Ni à la température ordinaire.

[1] Arpiarian N. et Saddy J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1948.
Arpiarian N. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 387.
[2] Arpiarian N. et Curie D. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 75.

Manuscrit reçu le 25 juin 1953.

LES POINTS DE TRANSITION DU CARBONATE DE POTASSIUM ANHYDRE; COMPARAISON AVEC LE CARBONATE DE SODIUM

Par J. Jaffray et P. Martin,

Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences, Clermont-Ferrand.

Nous avons montré récemment que le carbonate de sodium anhydre microcristallin possède au-dessus de la température ordinaire deux transitions très nettes, l'une à 360° C, l'autre à 480° C, de propriétés très différentes (*C. R. Acad. Sc.*, 1953, 236, 1755). Le premier point consiste en une transition du deuxième ordre, progressive et sans chaleur latente, ne comportant pas de modification importante et brusque du réseau cristallin. La seconde, au contraire tout d'abord progressive, consiste finalement en une transformation polymorphique classique, avec chaleur latente, discontinuité du volume, modification complète du diagramme de rayons X. Les premiers résultats de l'étude du mécanisme de cette transition semblent indiquer que le réseau, primitivement de basse symétrie (clinorhombique ?), devient finalement hexagonal au-dessus de 480° C.

Nous avons étudié par les mêmes méthodes le comportement du carbonate de potassium anhydre microcristallin au-dessus de la température ordinaire et jusqu'à la fusion. Nous avons encore trouvé deux points de transition respectivement vers 410 et 465° C. Mais il y a une différence très nette avec le carbonate de sodium. Pour les deux transitions, la dilatométrie a montré une parfaite continuité de volume, l'analyse thermique l'absence quasi certaine de chaleur latente, tandis que les rayons X ne révélaient aucune modification notable du réseau cristallin entre la température ordinaire et 500° C. Il s'agit donc de deux transitions successives du deuxième ordre se traduisant par des anomalies de chaleur spécifique et de dilatation thermique.

Il existe une autre différence entre les carbonates anhydres de sodium et de potassium. Alors que les transitions de la première substance sont bien reproductibles dans des expériences successives et qu'en particulier, les températures de transition sont déterminées à 1 ou 2° C près, pour le carbonate de potassium, au contraire, on remarque une certaine « paresse » dans la reproduction des transitions; les températures de transition ne sont connues qu'à 5 ou 6° près Ces phénomènes perturbateurs sont particulièrement sensibles dans les mesures de conductibilité électrique. Dans le cas du carbonate de sodium, les accidents de conductibilité électrique donnent avec précision les températures de transition, aussi bien que l'analyse thermique et la dilatométrie, mais avec le carbonate de potassium ces mesures donnent des résultats très irréguliers et non reproductibles.

Manuscrit reçu le 26 juin 1953.

PÉRIODE DU ^{59}Fe ET DU ^{65}Zn

Par Jacques Tobailem,

Institut du Radium, Laboratoire Curie.

Les périodes de décroissance radioactive du ^{59}Fe et du ^{65}Zn ont été déterminées avec une grande précision en utilisant notre dispositif de deux chambres d'ionisation différentielle [1], la source de compensation étant une source de radium.

Le montage utilisé a été amélioré et permet actuellement d'effectuer des mesures d'intensités comprises entre environ 0,1 μC et quelques centaines de microcuries (équivalent γ du Ra). On a obtenu ce résultat en introduisant dans le circuit de grille de la lampe électromètre une capacité de 5 000 pF très bien isolée (résistance d'isolement $> 10^{14}\,\Omega$); la grande constante de temps ainsi obtenue a permis d'augmenter le domaine des intensités mesurables. En outre, on a augmenté la sensibilité du montage qui a pu être portée à 10 000 mm/V tout en conservant une stabilité satisfaisante (dérive inférieure à 1 mm par jour, ce qui correspond à 0,1 mV sur la grille de la lampe électromètre).

Résultats expérimentaux : ^{59}Fe. — Une première détermination de la période du ^{59}Fe à partir d'une source non purifiée avait conduit à une valeur (47,1 ± 0,5) jours [1], une erreur systématique ayant pu s'introduire par suite de la présence possible d'impuretés de ^{60}Co. Les mesures ont été refaites en utilisant une source purifiée par M. Lederer [2] par chromatographie sur papier. L'intensité de la source utilisée était de 15 μC (équivalent γ du Ra dans les conditions expérimentales) et la décroissance a été suivie pendant 16 jours, ce qui correspond à une variation de 22 pour 100 par rapport à l'intensité initiale; on a effectué 16 séries de mesures.

^{65}Zn. — Le ^{65}Zn utilisé a été de même purifié par chromatographie sur papier. On a suivi pendant 60 jours la décroissance d'une source d'intensité 40 μC, la variation d'intensité étant de 15 pour 100; 20 séries de mesures ont été effectuées.

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant

Radio-élément.	Origine.	Valeurs de l'auteur (j).	Autres valeurs (j).
^{59}Fe...	Oak-Ridge (séparation chimique [2])	(45,0 ± 0,2)	(45,1 ± 0,2) [3]
^{65}Zn...	»	(245,0 ± 0,8)	(250 ± 5) [4]

[1] Tobailem J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **233**, 1360.
[2] Lederer M. — *Anal. Chim. Acta*, **8**, n° 2, p. 134.
[3] Schuman R. P. et Camilli A. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 158.
[4] Livingood et Seaborg. — *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 457.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1953.

SUR UN COMPTEUR A ÉTINCELLES A SYMÉTRIE CYLINDRIQUE

Par Théo Muller, Michel Croissiaux et Serge Gorodetzky.

Nous avons étudié un compteur à étincelles du type Rosenblum [1], [2], [3] à symétrie cylindrique [4].

L'étude a porté sur le comportement du compteur dans l'air, puis dans une atmosphère d'air contenant jusqu'à 1 pour 100 de CO_2. La coque du cylindre contient une fente, ce qui permet d'explorer les différentes parties du compteur, en ce qui concerne la sensibilité vis-à-vis des particules α. L'exploration était faite grâce à un dispositif micrométrique.

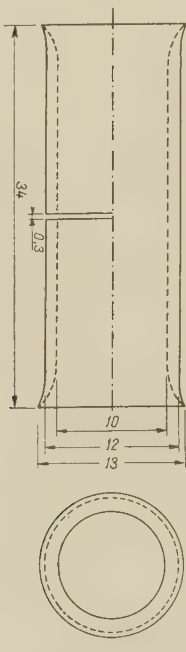


Fig. 1.

Le compteur a la forme suivante (*fig.* 1) :

L'anode est un fil de tungstène de 0,1 mm de diamètre tendu dans l'axe du cylindre de cuivre (cathode) de diamètre intérieur de 10 mm. L'anode est fendue en son milieu pour permettre l'introduction des particules α. Un jet de particules α bien délimité pénètre horizontalement dans le compteur à travers la fente. On peut faire passer le jet par l'axe du compteur, soit le fil; on peut déplacer aussi le jet parallèlement à lui-même de manière à ce qu'il traverse le compteur à toute distance du fil que l'on voudra. Ce mouvement est réalisé micrométriquement.

On peut ainsi étudier la sensibilité du compteur en fonction de la distance du jet de particules au fil. Les premières expériences ont porté sur un compteur dans l'air. On obtient alors la courbe suivante (*fig.* 2) (courbe *a*). On a porté en abscisses le déplacement latéral en millimètres, en ordonnées le taux de comptage. On voit que le maximum a lieu lorsque le jet de particules passe au voisinage du centre du compteur. Le nombre d'impulsions diminue assez rapidement dès que l'on s'écarte de cette position centrale.

Le compteur a ensuite été placé dans une atmosphère contenant du CO_2 en proportions variables. Tout d'abord 0,25, puis 0,50, 0,75 et enfin 1 pour 100 (respectivement courbes *b*, *c*, *d*, *e*). Lorsque l'on essaye d'introduire une proportion de CO_2 supérieure à 1 pour 100 le fonctionnement du compteur devient instable. Ce fait a déjà été reconnu par Payne [2] pour un compteur plan.

La région de fonctionnement la plus intéressante est manifestement celle où les proportions de CO_2 sont de 1 pour 100. Dans ces conditions, on a tout

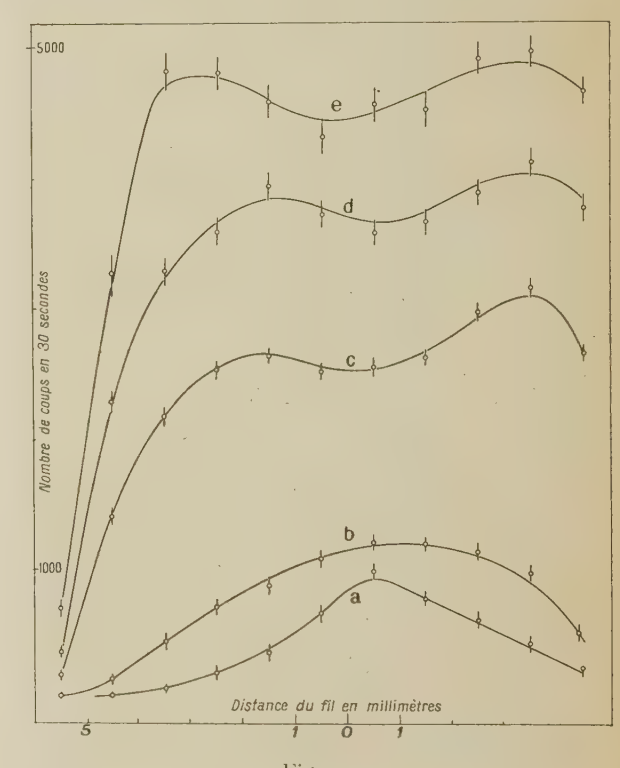


Fig. 2.

d'abord un taux de comptage beaucoup plus élevé que pour l'air ordinaire : de plus on aperçoit que la sensibilité du compteur ne diminue pas sensiblement lorsque l'on s'écarte du fil. La courbe (*e*) montre que le volume efficace du compteur est très considérablement augmenté et aussi que la sensibilité reste bien uniforme dans différentes régions du compteur.

[1] Chang W. Y. et Rosenblum S. — *Phys. Rev.*, 1945, **67**, 222.

[2] Payne R. M. — *J. Sc. Instr.*, 1949, **26**, 321.

[3] Savel P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 2596 et 1952, **235**, 156.

[4] Des compteurs à symétrie cylindrique ont été étudiés par : Connor R. D. — *Proc. Phys. Soc.*, 1951, **64** B, 30.

Manuscrit reçu le 6 juillet 1953.

PREMIERS RÉSULTATS D'EXPÉRIENCE SUR UNE SOURCE D'IONS A EXTRACTION ANNULAIRE

Par J. SOMMERIA,

Ingénieur E. S. E.,
Laboratoire de Synthèse Atomique, Ivry (Seine).

Le principe de cette source d'ions ainsi que celui de l'extraction annulaire ont déjà été décrits [1], [2].

La réalisation représentée sur la figure ci-contre (coupe suivant un plan passant par l'axe de révolution de l'ensemble) constitue une extension du principe de la source du type Heil dont nous avons perfectionné l'optique ionique [3]. La légende indique les parties principales; l'arrivée du gaz s'effectue en un point de la couronne portant les bornes isolantes.

L'électrode d'extraction est au potentiel de l'enceinte à vide (potentiel zéro), la chambre d'ionisation est à + 10 000 V environ, le filament F et les miroirs M sont à — 400 V environ par rapport à la chambre. Les électrons sont extraits du filament sous cette dernière tension et effectuent un certain nombre d'oscillations entre les deux parties cylindriques de M. Le champ magnétique radial assure la cohésion du flux électronique sous forme d'une nappe circulaire plane.

Ce premier montage qui demande encore une mise au point importante, notamment au sujet de l'optique ionique a permis une vérification remarquable des avantages suivants prévus dans la lettre précédente [1].

La symétrie circulaire de la chambre d'ionisation exclut la présence des composantes des champs électriques qui tendent à déformer la nappe électronique, que ces champs soient dus au système de miroirs ou au dispositif d'extraction. Le champ extracteur provoque un glissement des trajectoires électroniques autour de la chambre d'ionisation. Il doit donc suffire d'émettre les électrons en un seul point de la chambre pour que celle-ci soit entièrement balayée.

Le rendement d'ionisation $\left(\frac{\text{courant ionique}}{\text{courant électronique}}\right)$ doit être considérable étant données les très longues trajectoires électroniques.

Les résultats suivants vérifient ces propriétés.

Pour un champ magnétique au milieu de la chambre de 1500 gauss, une pression d'hydrogène de $1{,}5 . 10^{-3}$ mm Hg, une tension chambre-filament de 450 V et une tension d'extraction de 12 000 V, le courant ionique atteint 9 mA pour un débit électronique de 6 mA.

On voit que le rendement d'ionisation est supérieur à 1, ce qui peut s'expliquer aisément au point de vue théorique.

La forme du faisceau d'ions est très visible dans l'atmosphère résiduelle de l'enceinte à vide. Nous avons pu l'observer sur une longueur de 20 cm environ. La symétrie circulaire paraît parfaite, ce qui prouve que les électrons émis en un seul point par la cathode chaude se répartissent régulièrement dans toute la chambre d'ionisation.

Cette bonne répartition ainsi que la forme de la nappe électronique ont pu être vérifiées au démontage par les traces laissées sur les miroirs qui sont remarquablement fines (de l'ordre de 1 mm d'épaisseur) sans présenter d'accentuation aux environs du filament.

Il est utile de noter qu'un phénomène de décharge se produit dans l'espace d'accélération des ions sous l'action combinée des champs électrique et magnétique. Son intensité qui est d'environ 8 mA pour les conditions ci-dessus ne gêne pas le fonctionnement de la source. Il ne participe pratiquement pas à la formation des ions extraits.

Après la mise au point de l'optique ionique, nous pensons pouvoir obtenir un courant d'ions de 20 à 25 mA.

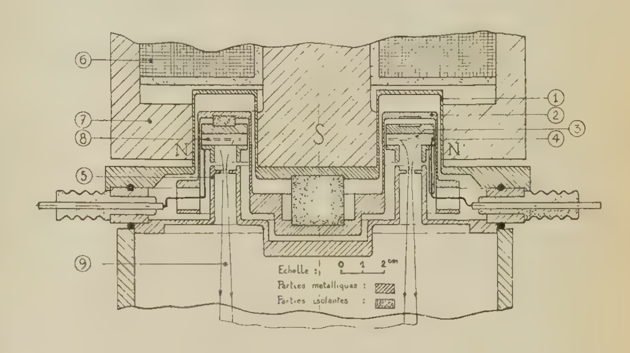


Fig.

1, Enceinte à vide; 2, Miroirs; 3, Chambre d'ionisation; 4, Cathode chaude (filament de Tu, diamètre 15/100e mm, 1,5 cm); 5, Électrode d'extraction des ions; 6, Bobinage de l'électro-aimant; 7, Circuit magnétique; 8, Nappe électronique; 9, Faisceau d'ions extraits.

[1] SOMMERIA J. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 563-564.
[2] CASSIGNOL C. — Letter in *Nature*, 1950, **166**, 233-234.
[3] SOMMERIA J. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 645-657.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1953.

REVUE DES LIVRES

BUREAU DES LONGITUDES, **Annuaire pour l'an 1953**, (1 vol. 13 × 19 cm, 562 pages, Gauthier-Villars, Paris, 750 f).

L'annuaire pour 1953 comporte les notices habituelles : Calendrier, prédictions, marées, études de divers calendriers, géodésie, météorologie, réfraction, rayonnement, électricité atmosphérique, magnétisme terrestre, soleil, lune, grosses planètes, comètes, météores, étoiles. Les articles sur : Physique solaire, parallaxes stellaires, météores, signaux horaires, comètes ont été remis à jour. Des articles nouveaux : Quelques données numériques importantes en Astronomie stellaire; Dimension du système galactique; Profondeur des océans et des mers. Une notice : du vaisseau à voile au porte-avion.

Les données géographiques et démographiques ont été mises à jour. J. COMBRISSON.

ROCARD (Y.), **Thermodynamique** (1 vol. 15,5 × 24 cm, 551 pages, Masson, Paris, 1952, 4150 f).

Dans cet ouvrage de Thermodynamique, l'auteur a voulu moderniser cet enseignement. Il a négligé d'insister à dessein sur les notions essentielles de la Thermodynamique classique; l'étudiant pouvant, pense-t-il, se reporter aux ouvrages comme celui de Bruhat où ces notions sont plus développées. A notre avis ceci est une lacune pour un traité intitulé « Thermodyanmique », car les notions de base ne sont pas toujours présentées avec suffisamment de clarté dans de nombreux livres.

Cette critique mise à part, l'ouvrage est d'un grand intérêt. L'auteur n'a pas craint d'exposer les applications techniques de la Thermodynamique à côté de considérations importantes sur la Thermodynamique des étoiles.

Il faut le louer d'avoir dans un chapitre repris les idées d'Onsager sur les phénomènes irréversibles. Il a sacrifié à la mode en introduisant des développements sur les réacteurs nucléaires.

Une partie importante du livre est consacrée à la Thermodynamique statistique, c'est une des parties les plus intéressantes.

Voici les principaux chapitres :

Les 12 premiers sont relatifs à la Thermodynamique classique et l'un d'eux a trait au théorème de Nernst, cet ensemble occupe 94 pages.

Dans une deuxième partie comportant six chapitres, l'auteur a rassemblé les propriétés thermodynamiques de la matière : Détente de Joule-Kelvin, équilibres entre états condensés d'un même corps, chaleurs spécifiques, systèmes binaires, etc.

La troisième partie concerne les applications techniques dont l'absence dans les traités était regrettable. Ce sont les écoulements gazeux, la machine à vapeur, les moteurs à combustion, les turbines à vapeur et compresseurs, les turbines à gaz et la propulsion par jets.

Les basses températures, quelques notions sur les explosifs et les possibilités de l'énergie nucléaire.

La quatrième partie est intitulée : Radiation. Étoiles.

Dans une cinquième partie, l'auteur introduit la Théorie cinétique des gaz que l'on trouve généralement traitée de façon trop succincte dans d'autres traités de Thermodynamique.

La Mécanique statistique fait l'objet de la sixième partie. Enfin les phénomènes irréversibles et le transfert de chaleur sont abordés.

Le livre comporte une série de tables diverses.

Ce traité rendra de grands services et élargira l'horizon des lecteurs possédant déjà les notions essentielles de la Thermodynamique. DUPUY.

TARDI (P.) et LACLAVÈRE (G.), **Traité de géodésie.** TOME I : *Triangulations*; fasc. 1 : *Les fondements mathématiques de la Géodésie. Opérations sur le terrain* (1 vol. 25 × 16,5 cm, XVII + 387 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1951, 2 500 f).

Colloque sur la sensibilité des cristaux et des émulsions photographiques (1 vol. 27 × 21 cm, XII + 380 pages, *Revue d'Optique*, Paris, 1953).

Cet Ouvrage est l'ensemble des Mémoires et discussions d'un Colloque organisé en septembre 1951 par le Professeur M. Morand et Mme A. Vassy.

Il contient 70 exposés groupés en plusieurs sections : cristaux, émulsions : image latente; émulsions : sensibilisation optique et désensibilisation; émulsions : préparation et sensibilisation chimique; émulsions : traitements, propriétés des images; émulsions nucléaires; divers.

Changements de phases (1 vol. 27 × 21 cm, 486 pages, Société de Chimie Physique).

Comptes-rendus d'un Colloque tenu à Paris en juin 1952 et organisé par la Société de Chimie Physique. Les chapitres suivants sont traités : Théorie thermodynamique et statistique des changements de phase, condensation, phénomènes critiques, changements de phase dans les solutions, solutions de polymères et colloïdes, phénomènes coopératifs dans les solides, polymorphisme et transitions de rotation, ferromagnétisme et points de Curie, fusion, transitions dans les corps amorphes et dans les phases superficielles.

Annual Report of the Smithsonian Institution (1950) (1 vol. 23 × 15 cm, IX + 522 pages, U. S. Government Printing Office, Washington).

Un tiers de cet Ouvrage est consacré aux divers comptes-rendus financiers et administratifs de l'Institution, les deux autres tiers à 19 articles de vulgarisation sur divers sujets de Physique, Astronomie, Géologie, Histoire naturelle, etc.

Annual Report of the Smithsonian Institution (1951) (1 vol. 23 × 15 cm, IX + 449 pages, U. S. Government Printing Office, Washington).

Comprend 20 articles de vulgarisation.

IVANOFF (A.), **Les aberrations de l'œil, leur rôle dans l'accommodation** (1 vol. 22 × 13,5 cm, 84 pages, *Revue d'Optique*, Paris, 1953, 560 f).

Applications à l'œil des méthodes de calcul rassemblées sous le nom d'étude des aberrations, l'auteur attachant beaucoup plus d'importance aux résultats expérimentaux qu'aux calculs eux-mêmes. L'Ouvrage est divisé en trois parties : L'œil théorique et ses aberrations; Étude expérimentale des aberrations de l'œil; Rôle des aberrations de l'œil dans l'accommodation.

KOLSKY (H.), **Ondes de déformation dans les solides** (1 vol. 22 × 14 cm, X + 211 pages, Clarendon Press, Oxford, 1953, 258).

Dans cet Ouvrage, l'auteur expose les théories et décrit les expériences suffisantes pour calculer et mesurer les grandeurs caractéristiques des phénomènes de propagation d'ondes dans la matière.

Les théories trop complexes, qui n'apporteraient pas directement au lecteur des notions intéressantes, ne sont pas développées (par exemple, l'étude de la réflexion des ondes

au delà de l'angle critique), mais les références mentionnées permettent de se reporter aux Ouvrages originaux.

De même, l'auteur se limite souvent à des interprétations approximatives, mais simples, des phénomènes; la propagation des ondes dans les milieux viscoélastiques est traitée pour les solides de Voigt et Maxwell, la théorie de Boltzman étant seulement mentionnée.

L'étude est faite pour les milieux élastiques d'une part, pour les milieux imparfaitement élastiques d'autre part.

Dans les premiers, l'auteur envisage successivement :

— la propagation des ondes dans un milieu et sur une surface indéfinis, la réfraction et la réflexion des ondes transversales et longitudinales en un point de la surface de séparation de deux milieux;

— les ondes longitudinales, de torsion et de flexion qui peuvent se propager dans un milieu limité, les calculs étant faits pour une barre cylindrique dont le diamètre est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, et pour une plaque indéfinie (la direction de déplacement étant parallèle au plan de la plaque). L'auteur indique quelques expériences concernant la mesure de la vitesse de phase de ces ondes. Il n'est fait aucune mention des calculs de Reissner et de l'expérience de Schneider et Buston qui en découle.

Dans les milieux imparfaitement élastiques, l'auteur étudie préalablement les frottements internes; il mentionne les diverses théories qui expliquent à l'échelle moléculaire l'absorption d'énergie :

— il traite la propagation des ondes dans le cas du solide de Voigt et Maxwell;

— il décrit sommairement ensuite les différentes méthodes de mesure des frottements internes : méthode de libre oscillation, de résonance, de propagation d'onde continue ou par impulsion (mesure de vitesse de phase et d'atténuation), enfin comparaison directe de l'effort et de la déformation.

Les théories et les expériences mettant en évidence la possibilité de propagation d'ondes plastiques sont exposées dans les derniers chapitres. Citons simplement le titre du dernier chapitre : *Fractures produites par les ondes de déformation.*

R. VIENET.

Computing Methods and the phase problem in X ray cristal analysis (Méthodes de raisonnement et problème de phase dans l'analyse des structures cristallines aux rayons X) (1 vol. 27 × 21 cm, XVII + 390 pages, Ray Pepinsky, éditeur; The X ray Crystal Analysis Laboratory, The Pennsylvania State College, State College, Pa, 1952).

Il est possible de déterminer la répartition de la densité électronique et par suite les positions relatives des atomes constituant un cristal quand on connaît les facteurs de structure F_{hkl} (amplitude et phase) relatifs à chaque famille de plans cristallins. L'expérience ne fournit que les carrés des modules $|F_{hkl}|^2$ et il convient d'essayer différentes combinaisons de phases φ_{hkl} pour obtenir les positions relatives des atomes. Les progrès dans la détermination des structures cristallines ont été accomplis par deux voies :

1° Recherche de relations mathématiques entre les phases φ_{hkl}, ce qui permet de diminuer le nombre d'essais;

2° Mises au point d'appareils effectuant rapidement les calculs nécessaires (séries de Fourier à une, deux ou trois variables) pour obtenir la répartition de la densité électronique à partir des F_{hkl}.

Les conférences faites au Pennsylvania State College en avril 1950, et dont les textes sont réunis dans un volume, sont relatives à ces deux voies de recherche. Voici le titre des conférences avec le nom de l'auteur :

État de la détermination des structures cristallines, par Ray PEPINSKY.

Les problèmes mathématiques de la détermination des structures, par J. M. BIJVOET.

L'interprétation du diagramme de Patterson, par C. A. BEEVERS.

Détermination à partir des $|F|^2$ de cartes indiquant les symétries, par A. L. PATTERSON.

Application de la théorie des images à la détermination des structures, par M. J. BUERGER.

Relation entre les inégalités de Harker-Kasper et les égalités de Buerger, par C. H. MAC GILLAVRY.

Relation entre les facteurs de structure, par J. A. GOEDKOOP.

Aspects mathématiques du problème de la détermination des phases, par B. FRIEDMAN.

La méthode de substitution isomorphe de détermination des phases dans le cas de structures non centrosymétriques, par J. M. BIJVOET.

Régions de l'espace réciproque correspondant à la *diffusion* des rayons X et relations de phases, par M. S. AHMED.

Les méthodes mécaniques possibles dans la résolution du problème des phases, par J. M. ROBERTSON.

Utilisation des méthodes optiques pour la détermination des structures, par C. W. BUNN.

Perfectionnements du « microscope à rayons X » de Bragg, par A. W. HANSON, C. A. TAYLER et H. LIPSON.

Appareil mécanique pour le calcul des séries de Fourier à une dimension, par C. A. BEEVERS et J. M. ROBERSTSON.

Appareils électriques pour le calcul de séries de Fourier à une dimension, par I. W. RAMSAY, H. LIPSON et D. ROGERS.

Les méthodes de calcul utilisant les cartes perforées, par E. G. COX.

Les méthodes de calcul utilisant les cartes perforées, par E. W. HUGHES.

Calculs cristallographiques au moyen d'une machine à calculer ultrarapide, par F. ORDWAY.

Les problèmes de calculs qui se posent dans la détermination de la structure des protéines, par M. F. PERUTZ.

Un calculateur électronique pour la détermination des structures, par R. PEPINSKY.

Cet article est le plus long du recueil; il décrit en détail « la machine de Pepinsky ». Cette machine, à partir des $|F_{hkl}|$ et des φ_{hkl}, permet d'obtenir directement sur l'écran d'un oscillographe cathodique les courbes de niveau de la projection des densités électroniques d'un cristal sur un plan quelconque; il est ainsi possible d'étudier directement les conséquences d'une variation d'un des paramètres sur la structure cristalline.

Le texte des conférences est suivi d'un recueil de Notes pour la plupart consacrées à l'utilisation de la machine de Pepinsky.

Il faut remercier le Pennsylvania State College d'avoir recueilli ces différents textes et de fixer ainsi une étape des techniques employées pour la détermination des structures cristallines au moyen de la diffraction des Rayons X.

G. FOURNET.

Low-Temperature Physics (Physique des basses températures) (1 vol. 24 × 16 cm, 291 pages, *Bur Stand. J. Research*, oct. 1952, $ 1,75).

Cet Ouvrage rassemble les communications présentées au Colloque sur les Basses Températures organisé à l'occasion du 50e anniversaire de la fondation du National Bureau of Standards.

Ce livre comprend 61 articles. On peut approximativement constater que :

— une vingtaine d'exposés sont consacrés aux divers aspects de la supraconductivité (exposés théoriques ou résultats expérimentaux);

— une quinzaine d'articles traitent des propriétés de l'hélium aux basses températures;

— les mesures des basses températures font l'objet de quelques communications.

Des sujets divers se partagent les articles restant : mesure des chaleurs spécifiques aux basses températures, carac-

téristiques des films métalliques aux basses températures, Renseignements pratiques sur les montages expérimentaux utilisés dans les recherches de cryomagnétisme.

J. Badoz.

Carlin (B.), **Les ultrasons** (1 vol. 25 × 16,5 cm, 276 pages, Eyrolles, Paris, 1953, relié 2 300 f).

Les applications des ultrasons sont diverses et nombreuses et le besoin peut se faire sentir de rassembler une documentation sur ce sujet. Il existe évidemment des livres fondamentaux comme celui de Bergmann, mais le livre de M. Carlin s'adresse sans doute à un public un peu différent. Après une introduction théorique simplifiée, l'auteur développe la partie expérimentale qui « fut presqu'entièrement effectuée par l'auteur soit en répétant les travaux des premiers chercheurs, soit en suivant les idées originales qu'ils lui suggèrent eux-mêmes ».

Extrait de la table des matières :

1. Ondes ultrasonores : propagation, réflexion, réfraction, production et détection;
2. Théorie complémentaire;
3. Cristaux par applications ultrasonores;
4. Supports de cristaux;
5. Résonance et réflexion (mesures d'épaisseurs, appareillage sous-marin, interféromètre);
6. Systèmes ultrasonores à ondes continues, essais de matériaux, signalisation;
7. Systèmes ultrasonores à impulsions;
8. Agitation par ultrasons;
9. Magnétostriction;
10. Considérations pratiques concernant l'application des ultrasons : recherche des défauts dans les solides, mesures d'épaisseurs, agitation par ultrasons, télévision, signalisation, médecine.

J. Badoz.

Michel (P.), **La spectroscopie d'émission** (1 vol. 17 × 12 cm, 224 pages, Colin, Paris, 1953, 260 f).

La liste est longue des Ouvrages généraux publiés en langue étrangère et consacrés aux applications analytiques de la spectroscopie. En Français, par contre, très peu de livres renseignaient sur cette technique en plein essor.

Le livre de M. Pierre Michel : *La spectroscopie d'émission et ses applications* vient heureusement satisfaire un besoin

L'Ouvrage se divise en sept chapitres :

Chapitre I : Introduction.

Au cours du second chapitre, l'auteur rappelle les notions physiques indispensables à l'emploi de la spectroscopie.

Le chapitre III : production des spectres, se divise en deux parties également importantes :

Dans la sous-section « sources lumineuses », on trouvera une description et une comparaison des différents types de sources utilisés; leurs avantages et leurs inconvénients respectifs sont clairement énoncés.

L'autre sous-chapitre est consacré aux spectrographes : description des principaux montages et étude comparative, tous renseignements précieux.

Le chapitre suivant traite des moyens d'étude des spectres.

La plaque photographique dont l'importance est considérable en spectrographie fait l'objet d'un paragraphe substantiel (signalons l'étude comparative des différentes méthodes de calibrage des émulsions).

Au microdensitomètre, appareil important du laboratoire, l'auteur consacre une étude détaillée qui attire l'attention sur de nombreux points d'importance pratique.

Les deux chapitres suivants sont respectivement consacrés à l'analyse qualitative et à l'analyse quantitative. Comme les autres, ils sont rédigés avec un souci évident d'utilisation pratique.

Le dernier chapitre est consacré à l'analyse directe.

Le texte renvoie à une bibliographie classée en fin de volume par sujet. Un index alphabétique complète très heureusement la table des matières.

Indispensable au jeune spectrographiste, le livre de M. Michel ne sera pas inutile aux Ingénieurs plus expérimentés, mais parfois plus spécialisés, par l'excellent exposé d'ensemble qu'il constitue et les nombreux renseignements pratiques qu'il contient.

J. Badoz.

Dognon (A.), **Les ultrasons et leurs applications** (1 vol. 19 × 12 cm, 181 pages, Presses universitaires, Paris, 1953, 500 f).

Depuis que les travaux de Langevin ont permis la production des ultrasons, le domaine des recherches exécutées à l'aide de ce nouveau moyen s'est considérablement étendu. S'il existe — en langues étrangères — des traités complets sur les ultrasons, le besoin se faisait sentir d'un livre à la fois simple et complet. C'est ce qu'a réalisé André Dognon.

Dans cet Ouvrage de 180 pages figurent les données essentielles concernant la production des ultrasons, la mesure de leur vitesse, de leur intensité, de leur absorption, ainsi qu'une étude des phénomènes généraux observés dans des milieux parcourus par ces vibrations et les principales applications scientifiques et industrielles des ultrasons.

Une attention toute particulière doit être portée — en raison de la qualité de l'auteur — à la partie du livre consacrée à l'action biologique des ultrasons et à l'utilisation de ceux-ci en médecine.

P. Biquard.

Glaser (W.), **Grundlagen der Elektronenoptik** (Les principes de l'optique électronique) (1 vol. 24 × 16 cm, 699 pages, Springer-Verlag, Vienne).

Traité d'Optique électronique. La première partie est consacrée à des rappels théoriques sur le mouvement des électrons dans un champ électromagnétique et sur les analogies avec les rayons lumineux ainsi qu'aux études expérimentales correspondantes. La deuxième partie traite des aberrations géométriques, la troisième de l'Optique électronique proprement dite et de la Mécanique ondulatoire. Une bibliographie complète l'Ouvrage.

J. Combrisson.

Chazy (J.), **Mécanique céleste (équations canoniques et variations des constantes)** (1 vol. 19 × 14 cm, 270 pages, Presses universitaires, Paris, 1953, 1300 f).

Ce livre reproduit et développe différentes questions que l'auteur traite au cours de Mécanique analytique et Mécanique céleste à la Sorbonne. Les principaux chapitres sont : Équations canoniques et généralisations, applications du calcul des variations, théorème de Poincaré, le théorème de Jacobi et le mouvement elliptique, méthode de la variation des constantes, applications des équations de la théorie des perturbations.

J. Combrisson.

Cornelius (P.), **L'électricité selon le système Giorgi rationalisé** (1 vol. 25 × 16 cm, XIX + 116 pages, Dunod, Paris, 1953, 680 f).

Cet Ouvrage s'adresse aux professeurs, assistants et ingénieurs qui sont encore peu familiarisés avec le système Giorgi rationalisé. C'est un court exposé des différents chapitres de l'électrodynamique et de l'électromagnétisme suivi de formulaires et de tableaux de correspondances entre unités. A ce titre, il doit rendre de grands services comme aide-mémoire.

J. Combrisson.

Colloques internationaux du C. N. R. S. (Paris, mai 1952), **Electrolyse** (1 vol. 27 × 21 cm, 146 pages, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1952, 1500 f).

Ce volume est le compte-rendu d'un Colloque organisé

à l'École Supérieure de Chimie par MM. Jolibois, Darmois et Audubert. Il comprend trois parties : Études sur les sels fondus; Interactions solvant-corps dissous; Aspects spéciaux de l'électrolyse. J. Combrisson.

Grimsehl, **Lehrbuch der Physik**. Tome III : *Optique* (1 vol. 23 × 16 cm, 337 pages, B. G. Teubner, Leipzig, 1952, 12,5 D. M.).

Le troisième volume de la nouvelle édition du Cours de Physique bien connu constitue un Traité d'Optique, assez élémentaire au point de vue mathématique, mais décrivant de nombreux phénomènes physiques : raies et bandes d'absorption, fluorescence, phosphorescence, effet Raman, effets magnéto-optique et électro-optique, par exemple.

J. Combrisson.

Index generalis 1952-1953 (Annuaire général des Universités) (1 vol. 23 × 19 cm, xiv + 1673 pages + 55 pages, Dunod, Paris, 1953, 950 f).

Cet important volume donne la liste détaillée des Universités, grands Établissements d'enseignements, Observatoires, Bibliothèques, Instituts scientifiques, Académies et Sociétés savantes de 68 nations. Tables des matières importantes comportant les noms du personnel savant et les noms de ville mentionnés dans l'Ouvrage. J. Combrisson.

Richardson (E. G.), **Sound (a physical textbook)** (1 vol. 22 × 13,5 cm, 352 pages, Arnold, Londres, 25 s).

Traité d'Acoustique rédigé d'après le cours professé à l'Université de Durham. Après des rappels mathématiques sur les propriétés des ondes sonores et les systèmes vibrants (solide, cordes et verges, membranes et plaques), l'auteur étudie la formation des tourbillons, la notion d'impédance acoustique, les ultrasons, la physiologie du son, l'acoustique des bâtiments, le repérage acoustique, la reproduction et la synthèse du son.

Curry (C.), **Geometrical optics** (1 vol. 22 × 13,5 cm, viii + 173 pages, Arnold, Londres, 21 s).

Traité d'Optique géométrique par le professeur de l'Université de Leeds. Au sommaire : réflection et réfraction par une surface plane, prismes, dispersion, formation des images dues aux systèmes minces, principes de base des instruments d'optique, systèmes de lentilles, pupilles, aberrations, construction des instruments d'optique.

Klemperer (O.), **Electron optics** (1 vol. 22 × 13,5 cm, 470 pages, University Press, Cambridge, 50 s).

Cette monographie fait le point des principes, méthodes et applications de l'Optique électronique géométrique. Il contient 500 références bibliographiques presque toutes postérieures à 1939. Les premiers chapitres rappellent les principes et faits expérimentaux concernant les lentilles électroniques, les chapitres suivants traitent des aberrations géométriques, des aberrations électroniques, des charges d'espace, des systèmes d'émission, des lentilles électroniques et systèmes d'émission à focalisation axiale, des champs déflecteurs, des applications de l'Optique électronique à l'industrie et à la recherche.

Lebeau (P.) et Trombe (F.), **Les hautes températures et leurs utilisations en Chimie**. I. et II. (2 vol. 16 × 25 cm, xxx + 1397 pages, Masson, Paris, 1950, 9 000 f).

L'Ouvrage résulte d'une collaboration entre les divers chercheurs et techniciens spécialistes des problèmes relatifs aux hautes températures et à leurs utilisations. Les idées directrices du livre de P. Lebeau écrit en 1924 sur le même sujet, et qui fut tant apprécié, ont été reprises. C'est en somme une édition rajeunie, considérablement enrichie des résultats et des techniques les plus récents, elle fera autorité. On doit se féliciter de la parution d'un tel livre en langue française.

Voici ci-dessous la table des matières traitées ainsi que les auteurs :

Les flammes et la production des hautes températures à l'aide des gaz combustibles, par P. Laffitte, N. Manson et E. Freling;

Rôle des explosifs dans la production des températures élevées et des synthèses minérales, par H. Muraour et Albert-Michel Lévy;

Les fours solaires, par F. Trombe;

Le chalumeau à hydrogène atomique, par L. Hackspill et J. Cueilleron;

Les fours à résistance métallique, par P. Chevenard et X. Waché et aussi par P. Fleuryot et L. Hackspill.

Fours à résistance de carbone, par G. Chaudron et L. Moreau.

Fours à conducteurs de seconde espèce, carbures de silicium et oxydes réfractaires, par J. Bénard;

Les fours à conducteurs ionisés, par J.-L. Andrieux;

Fours à haute fréquence, par G. Ribaud;

Les fours à arc, par A. Damiens et A. Morette;

L'arc électrique intensif, par V. Oswald;

Phénomènes chimiques provoqués par la décharge électrique dans les gaz;

Fours à rayons cathodiques et à chute anodique, par F. Trombe;

Fours à pertes diélectriques, par M. Descarsin;

Fours électriques à pression, par Marius Picon.

Le deuxième tome comporte les chapitres suivants :

Les fours à chauffage dans le vide ou en atmosphère inerte, par G. Chaudron et L. Moreau;

Mesures des hautes températures, par G. Ribaud;

Enregistrement et régulation des températures, par G. Bouchet;

Les méthodes de contrôle des réactions à haute température, par J. Bénard, M. Foëx, F. Trombe et S. Wyart;

Les méthodes céramiques, par L. Brémond;

La silice, par Y. Letort;

Alumine, chromite, par E. Dupuy;

Oxyde de titane, oxyde d'étain, par B. Long;

Magnésie, forstérite et spinelle, par M. Maillet;

Glucine, par F. Trombe et M. Foëx;

Chaux, par F. Trombe et M. Foëx;

Zircone, par F. Trombe et M. Foëx;

Chorine, par F. Trombe et M. Foëx;

Les produits réfractaires industriels, par Y. Letort et L. Halm;

Tables des constantes, par M. Foëx et A. Berton.

En addendum :

Le chalumeau à hydrogène fluor, par H. Cueilleron;

Les régulateurs de température, par M. Ribaud;

Les calorifuges, par I. Peyches;

Les échelles de température, par Y. Letort.

Dupuy.

Parodi (M.), **Équations intégrales et transformation de Laplace** (1 vol. 18 × 27 cm, 125 pages, Publication du Ministère de l'Air, Paris, 1950, 800 f).

Ce fascicule comprend tout d'abord un exposé succinct — trop succinct même — des éléments du calcul symbolique. L'auteur part de la transformation de Laplace, préférable à ses yeux, à celle de Carson, et démontre avec une extrême rigueur la convergence de l'intégrale, l'analyticité de la transformation, la dérivabilité et l'intégrabilité de la correspondance, et finalement, établit l'inversion de la transformation par la méthode de Bromwich-Wagner. Les propriétés de ce processus d'inversion sont judicieusement développées; l'unicité de l'original d'une fonction image est précisée.

Le chapitre se termine par un rappel des règles fondamentales du calcul symbolique et un tableau de la représentation symbolique des principales fonctions usuelles.

L'auteur étudie au second chapitre un premier type d'équations intégrales à limites fixes résolubles par le calcul symbolique :

$$f(t) + \lambda \int_0^\infty K(t, x) f(x) \, \mathrm{d}x = g(t),$$

où le noyau $K(t, x)$ est un produit de composition de la forme

$$a^*(t) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} x^n \overline{b(t)^n}^* .$$

Les différentes formes possibles de l'image du noyau sont envisagées; la fonction $f(t)$ inconnue est obtenue par une intégrale prise sur un contour de Bromwich approprié.

M. Parodi passe ensuite au cas où l'exponentielle de l'image du noyau $h(s)$ est une fonction périodique du second ordre; il obtient la solution sous forme d'une intégrale portant sur des fonctions de Bessel. Une mention particulière est faite des noyaux réciproques. De nombreux exemples illustrent ce second groupe d'équations intégrales. La méthode est ensuite étendue au cas où $h(s)$ est une fonction périodique d'ordre n.

Au paragraphe suivant, l'auteur étudie les équations intégro-différentielles que la transformation de Laplace permet encore de résoudre aisément lorsque l'exponentielle de l'image du noyau est une fonction périodique d'ordre n. Des exemples font suite.

L'étude des équations homogènes est tout aussi aisée lorsque le noyau possède cette structure particulière.

Le chapitre se termine par l'étude détaillée des équations de première espèce :

$$\int_0^\infty K(t, x) f(x) \, \mathrm{d}x = g(t),$$

soit par transformation directe, soit au moyen de deux transformations de Laplace successives. Le problème se simplifie si le noyau initial est réciproque.

Le troisième chapitre est consacré aux équations du type

$$f(t) + h \int_a^b K(x) f[r(x) + t] \, \mathrm{d}x = g(t),$$

dont les propriétés sont rapprochées de celles des équations de Volterra de seconde espèce.

Au chapitre suivant, l'auteur applique les séquences symboliques à la résolution des équations intégrales en envisageant diverses formes particulières de noyau.

Le dernier chapitre montre comment certains types d'équations intégrales peuvent être construits à partir d'équations fonctionnelles. Partant d'équations fonctionnelles de solutions connues, on cherche les équations intégrales dont elles sont les originaux, ce qui conduit à des relations nouvelles entre diverses transcendantes.

La lecture du fascicule de M. Parodi ne laisse qu'un regret, celui de ne pouvoir suivre la pensée de l'auteur à travers un volume didactique largement développé.

J. Roubaud-Valette.

Institute of Metals, **Applications métallurgiques du microscope électronique** (1 vol. 14 × 22 cm, 164 pages, Inst. Metals, London, 1950, 21 s).

Cet Ouvrage rassemble les 13 Mémoires présentés à un Symposium de l'Institute of Metals en 1949. Tous ces Mémoires traitent de l'application du microscope électronique à la Métallurgie en Angleterre, Amérique, France et Allemagne. Des résultats, quelquefois inédits, sont publiés sur l'étude des structures des alliages de cuivre, d'aluminium, de nickel et chrome et des aciers trempés.

L'Ouvrage contient, en outre, une longue discussion sur ces travaux et les applications possibles du microscope électronique en Métallurgie.

A. Martin.

Escande (L.), **Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre** (1 vol. 19 × 28 cm, 557 pages, Dunod, Paris, 1950, 1850 f).

Cet Ouvrage vient compléter un premier Mémoire de l'auteur concernant ses recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau dans les chambres d'équilibre.

En particulier, l'auteur développe de nouvelles méthodes pour l'étude des chambres d'équilibres, utilisables dans le cas le plus général d'une cheminée à section variable munie d'un étranglement, par l'application des différences finies. Des exemples d'application de cette méthode sont donnés : cas où n chambres sont montées en série, étude des chambres déversantes.

Cette méthode conduit à des calculs assez longs. Pour les besoins de la pratique, l'auteur a mis au point une méthode plus rapide, en étendant aux chambres à section variable, la méthode graphique de MM. Calame et Gaden. Il parvient ainsi à une méthode utilisant simultanément les graphiques et les calculs.

De très nombreux exemples pratiques d'utilisation sont donnés avec les résultats de vérifications expérimentales systématiques.

Les résultats théoriques sont retrouvés expérimentalement avec une approximation très suffisante pour les besoins de la technique.

A. Martin.

Dubois (M.), **Jets gazeux sensibles aux sons et aux ultrasons** (1 vol. 18 × 27 cm, 65 pages, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1951, 450 f).

L'auteur a étudié les jets sensibles aux sons. Ce sont des jets de gaz divers rendus visibles par de la fumée qui, lisses sur une longueur de 10 ou 20 cm ou davantage, s'ouvrent brusquement sous l'effet du son en un point de leur parcours en un panache tourbillonnant. Ce changement d'aspect commence et finit en même temps que l'émission sonore.

Les principales divisions de l'Ouvrage sont :

— Jets sensibles aux ultrasons; leur observation ; sensibilité extrême des petits jets.

— Mécanisme de la sensibilité des jets : étude des phénomènes à l'orifice, de la progression et déformation du jet. Étude mathématique des formes du jet.

— L'étude du domaine de sensibilité des jets d'air donne les lois reliant les fréquences limites de sensibilité aux variables du jet (diamètre, vitesse, pression). Application aux cas des jets de butane et d'hydrogène.

L'hydrogène permet de déceler très aisément des ultrasons et de constituer un nouveau détecteur à ultrasons simple, peu coûteux et de petites dimensions, mais assez peu sélectif.

— Jets sensibles et autoplissement.

— Application de certaines conclusions aux jets de liquides visqueux.

J. Badoz.

Le Gérant : Maurice Blondin. 144223 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1953.